

ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

3. Признаки Даламбера * и Коши. Следующие два признака основаны на сравнении рассматриваемого ряда (1) с одним из двух конкретных рядов – с быстро сходящимся рядом с общим членом $p_k = q^k$, $0 < q < 1$ (см. пример 1 §1) или с быстро расходящимся рядом с общим членом $p_k = 1$. Каждый из признаков формулируется в двух формах: I) в виде неравенств и II) в предельной форме.

Теорема 6 (признак Коши). I. Если для всех номеров k , начиная с некоторого номера k_0 , справедливо неравенство

$$\sqrt[k]{p_k} \leq q < 1 \quad (\sqrt[k]{p_k} \geq 1), \quad k \geq k_0 \geq 1, \quad (6)$$

то ряд (1) сходится (расходится).

II. Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = L, \quad (7)$$

то при $L < 1$ ряд (1) сходится, а при $L > 1$ – расходится.

* Жан Лерон Даламбер – французский математик и философ (1717 – 1783).

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Доказательство. Итак, рассматриваем ряд (1), напомним

$$\sum_{k=1}^{\infty} p_k, \quad p_k \geq 0. \quad (1)$$

I. Возведем в k -ю степень обе части второго неравенства (6) $\sqrt[k]{p_k} \geq 1$, получим неравенство $p_k \geq 1, k \geq k_0$, то есть общий член ряда (1) не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ и ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости ряда). Возведем в k -ю степень обе части первого неравенства (6) $\sqrt[k]{p_k} \leq q$, получим неравенство $p_k \leq q^k, k \geq k_0$. Поскольку ряд с общим членом $p'_k = q^k, 0 < q < 1$, сходится (см. пример 1 §1), то по первому признаку сравнения (теорема 3) ряд (1) сходится.

II. Из существования предела (7) следует

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N}: \quad \forall k \geq N \quad |\sqrt[k]{p_k} - L| < \varepsilon,$$

или

$$L - \varepsilon < \sqrt[k]{p_k} < L + \varepsilon. \quad (8)$$

Если $L < 1$, то выбирая ε так, что $L + \varepsilon < 1$, и обозначая $q = L + \varepsilon$, получаем из правого неравенства (8): $\sqrt[k]{p_k} < q < 1$, откуда, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (1) сходится. Если $L > 1$, то выбирая ε так, что $L - \varepsilon = 1$, получаем из левого неравенства (8): $\sqrt[k]{p_k} > 1$, из чего, согласно первой части теоремы, заключаем, что ряд (1) расходится. Заметим, что если $L = \infty$, то рассуждения аналогичные ($\sqrt[k]{p_k} > 1, k \geq k_0 \geq 1$). Теорема доказана.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Замечания. 1. Строгое отделение от 1 в первом неравенстве (6) – по существу: нельзя заменить это неравенство на $\sqrt[k]{p_k} < 1$. Достаточно заметить, что последнее неравенство выполняется для каждого из следующих двух рядов, из которых один сходится, а второй расходится: гармонический ряд, $p_k = \frac{1}{k}$, $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\sqrt[k]{k}} < 1, k > 1$ (ряд расходится) и обобщенный гармонический ряд, $p_k = \frac{1}{k^2}$,

$$\sqrt[k]{p_k} = \left(\frac{1}{\sqrt[k]{k}}\right)^2 < 1, k > 1 \text{ (ряд сходится).}$$

2. Если в соотношении (7) $L = 1$, то признак не позволяет судить о поведении ряда (говорят "признак не работает"). Действительно, для каждого из рядов, приведенных в первом замечании, справедливо $\sqrt[k]{p_k} \rightarrow 1, k \rightarrow \infty$, то есть $L = 1$, но один ряд сходится, а второй расходится.

Задача. Докажите, что теорему 6 можно усилить, заменив в условии (7) знак предела на знак верхнего предела.

Теорема 7 (признак Даламбера). Рассмотрим ряд (1) все члены которого, начиная с некоторого номера $k_0 \geq 1$, отличны от нуля.

I. Если для всех номеров k , начиная с некоторого номера k_0 , справедливо неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1 \quad \left(\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1 \right), \quad k \geq k_0 \geq 1, \quad (9)$$

то ряд (1) сходится (расходится).

II. Если существует предел

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k} = L, \quad (10)$$

то при $L < 1$ ряд (1) сходится, а при $L > 1$ – расходится.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Доказательство. I. Если выполняется второе неравенство (9), $\frac{p_{k+1}}{p_k} \geq 1$, или $p_{k+1} \geq p_k > 0$, то общий член ряда (1) не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$ и ряд расходится (нарушено необходимое условие сходимости ряда). Если выполняется первое неравенство (9), $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq q < 1$, то представив $q = \frac{q^{k+1}}{q^k}$, получим неравенство

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq \frac{q^{k+1}}{q^k}.$$

Поскольку ряд с общим членом $p'_k = q^k$, $0 < q < 1$, сходится (см. пример 1 §1), то третий признак сравнения (теорема 5) позволяет утверждать, что ряд (1) сходится.

II. Для доказательства второй части теоремы следует дословно повторить схему доказательства второй части теоремы 6, заменив $\sqrt[k]{p_k}$ на $\frac{p_{k+1}}{p_k}$. *Теорема доказана.*

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Замечания. Сформулированные выше замечания к теореме 6 переносятся и на теорему 7. Те же два примера это подтверждают.

1. Неравенство (9) нельзя заменить на $\frac{p_{k+1}}{p_k} < 1$.
2. Если в соотношении (10) $L = 1$, то признак не позволяет судить о поведении ряда.

Задача. Докажите, что теорему 7, случай $L < 1$, можно усилить, заменив в условии (10) знак предела на знак верхнего предела.

Пример 4. Исследовать на сходимость ряд

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{(\lg n)^n}.$$

Применим признак Коши в предельной форме: $p_k = \frac{1}{(\lg k)^k}$, $\sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{\lg k} \rightarrow 0$, $k \rightarrow \infty$, то есть $L = 0 < 1$ и ряд сходится.

Пример 5. Исследовать на сходимость ряд

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!}, \quad x > 0.$$

Мы уже выяснили (см. пример 2 §1), что суммой этого ряда для каждого значения $x \in \mathbb{R}$ является величина e^x . Приведем более короткий способ обоснования сходимости этого ряда.

Применим признак Даламбера в предельной форме: $p_k = \frac{x^k}{k!}$, $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{x}{k+1} \rightarrow 0, k \rightarrow \infty$, то есть $L = 0 < 1$ и ряд сходится.

4. Сравнение признаков Даламбера и Коши.

Некоторые признаки сходимости числовых рядов можно сравнивать между собой. Пусть рассматриваются два признака сходимости, назовем их первый и второй. Говорят, что *первый признак является более сильным, чем второй*, если всякий раз, когда применим второй признак, применим и первый (и конечно, дает тот же результат), но существуют ряды, для которых первый признак применим, а второй нет ("не работает").

Покажем, что признак Коши является более сильным, чем признак Даламбера. Сравним их в предельной форме.

Справедливо следующее

Утверждение 1. *Если существует предел (10) , то существует и предел (7) (и они равны между собой). Обратное неверно.*

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Для того чтобы доказать, что из существования предела (7) не следует существования предела (10), достаточно привести пример такого ряда.

Рассмотрим следующий ряд с положительными членами

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3 + (-1)^k}{2^k}. \quad (11)$$

Заметим, что последовательность $\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{1}{2} \cdot \frac{3+(-1)^{k+1}}{3+(-1)^k}$ имеет две предельные точки: 1 и $\frac{1}{4}$, и потому не имеет предела, то есть признак Даламбера не применим для исследования ряда (11) на сходимость (первая часть признака также "не работает", поскольку справедливо лишь следующее неравенство $\frac{p_{k+1}}{p_k} \leq 1$). Вместе с тем, существует предел (7): $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k} = \frac{1}{2} = L < 1$, то есть признак Коши применим и дает нам сходимость ряда (11). Вторая часть утверждения доказана.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Для того чтобы доказать первую часть утверждения, сформулируем две леммы о свойствах средних арифметических и средних геометрических числовых последовательностей.

Лемма 1. Если последовательность $\{a_n\}$, $a_n \in \mathbb{R}$, сходится к пределу a , то к тому же пределу сходится и последовательность средних арифметических этих чисел

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n}$$

(допустимо $a = +\infty$, $a = -\infty$).

Доказательство. 1) Пусть предел $a = 0$. Последовательность $\{a_n\}$ ограниченная, поэтому $\exists c = \text{const} > 0 : |a_n| \leq c \ \forall n$. С другой стороны,

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad |a_n| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Используем эти две оценки. Найдем номер N_1 такой, что справедлива оценка $\frac{cN}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ для всех номеров $n > N_1$ и рассмотрим номера $n > \max(N, N_1)$. Тогда

$$\begin{aligned} \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \right| &= \left| \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \dots + a_n}{n} \right| < \\ < \frac{cN}{n} + \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{n-N}{n} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon, \end{aligned}$$

то есть

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow 0, \quad n \rightarrow \infty.$$

2) Пусть предел $a \neq 0$, a - некоторое конечное число. Тогда последовательность $\{a_n - a\}$ сходится к нулю и рассматриваемый случай сводится к предыдущему случаю:

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} - a = \frac{(a_1 - a) + (a_2 - a) + \dots + (a_n - a)}{n} \rightarrow 0,$$

$$n \rightarrow \infty, \text{ то есть } \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow a, \quad n \rightarrow \infty.$$

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

3) Рассмотрим случай $a = +\infty$ (случай $a = -\infty$ рассматривается аналогично). Обозначим через c такое положительное число, что $a_n > -c$ для всех номеров n . По определению бесконечно большой положительной последовательности можно записать, что

$\forall A > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad a_n > A$. Пусть $n > 2N$, тогда $\frac{N}{n} < \frac{1}{2}$, $-\frac{N}{n} > -\frac{1}{2}$ и для средних арифметических получим

$$\begin{aligned} \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} &= \frac{a_1 + a_2 + \dots + a_N}{n} + \frac{a_{N+1} + \dots + a_n}{n} > -\frac{cN}{n} + \frac{A(n-N)}{n} > \\ &> -\frac{c}{2} + A\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{A-c}{2}, \quad \forall n > 2N. \end{aligned}$$

Так как A как угодно большое число, то и $\frac{A-c}{2}$ – как угодно большое число, а это означает, что

$$\frac{a_1 + a_2 + \dots + a_n}{n} \rightarrow +\infty, \quad n \rightarrow \infty.$$

Лемма доказана.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Лемма 2. Если последовательность положительных чисел $\{a_n\}$ сходится к пределу a , то к этому же пределу сходится и последовательность средних геометрических этих чисел

$$\tau_n = \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n}. \quad (12)$$

Доказательство. Рассмотрим два возможных случая 1) $a > 0$, 2) $a = 0$. В случае 1) в силу непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента справедливо $\lim_{n \rightarrow \infty} \ln a_n = \ln a$. Но тогда в силу леммы 1 существует также равный $\ln a$ предел последовательности

$$\ln \tau_n = \ln \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n} = \frac{\ln a_1 + \ln a_2 + \dots + \ln a_n}{n}.$$

В силу непрерывности показательной функции заключаем, что существует равный a предел последовательности (12).

В случае 2) требуется доказать, что последовательность (12) является бесконечно малой. Выпишем две оценки:

$$\exists c = \text{const} > 0 : a_n < c \quad \forall n;$$

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad a_n < \varepsilon.$$

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Пусть $n > N$, применим эти оценки

$$\begin{aligned}\tau_n &= \sqrt[n]{a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_N} \cdot \sqrt[n]{a_{N+1} \cdot \dots \cdot a_n} < \sqrt[n]{c^N} \sqrt[n]{\varepsilon^{n-N}} = \\ &= \varepsilon \sqrt[n]{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^N} < 2\varepsilon,\end{aligned}$$

где последняя оценка получена при $n > N_1(\varepsilon)$: мы воспользовались тем, что $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{\left(\frac{c}{\varepsilon}\right)^N} = 1$. Лемма доказана.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Доказательство утверждения 1. Для доказательства того, что из существования равного L предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{p_{k+1}}{p_k}$ вытекает существование также равного L предела $\lim_{k \rightarrow \infty} \sqrt[k]{p_k}$, достаточно применить лемму 2.

Рассмотрим последовательность $a_1 = p_1$, $a_2 = \frac{p_2}{p_1}, \dots$, $a_k = \frac{p_k}{p_{k-1}}$, очевидно, $a_k \rightarrow L$, $k \rightarrow \infty$. Но тогда

$$\sqrt[k]{p_k} = \sqrt[k]{\frac{p_k}{p_{k-1}} \cdot \frac{p_{k-1}}{p_{k-2}} \cdot \dots \cdot \frac{p_2}{p_1} \cdot p_1} = \sqrt[k]{a_k \cdot a_{k-1} \cdot \dots \cdot a_2 \cdot a_1} \rightarrow L,$$

$k \rightarrow \infty$. Утверждение 1 полностью доказано.

Таким образом, мы завершили сравнение признаков Коши и Даламбера. Несмотря на то, что признак Коши является более сильным, при исследовании конкретных рядов часто бывает проще применить признак Даламбера.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

5. Интегральный признак Коши-Маклорена *. Признаки Коши и Даламбера не являются универсальными. Например, они не позволяют сделать заключение о сходимости для различных значений α рядов

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \sum_{k=2}^{\infty} \frac{1}{k \ln^{\alpha} k}.$$

Для такого вида рядов полезен следующий признак сходимости рядов с неотрицательными членами.

Теорема 8 (Теорема Коши-Маклорена). Пусть функция $f(x)$ неотрицательна и не возрастает всюду на полупрямой $x \geq 1$. Тогда числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} f(k) = f(1) + f(2) + \dots \quad (13)$$

сходится тогда и только тогда, когда сходится числовая последовательность $\{a_n\}$:

* Колин Маклорен – английский математик (1698 – 1746).

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

$$a_n = \int_1^n f(x) dx. \quad (14)$$

Доказательство. Фиксируем любой номер $k \geq 2$ и рассмотрим значения аргумента $x \in [k-1, k]$. Так как функция $f(x)$ не возрастает на указанном отрезке, то справедливы неравенства

$$f(k) \leq f(x) \leq f(k-1), \quad \forall x \in [k-1, k]. \quad (15)$$

Из ограниченности и монотонности функции $f(x)$ на отрезке $[k-1, k]$ следует, что она интегрируема на этом отрезке. Проинтегрируем неравенства (15) по отрезку $[k-1, k]$, получим

$$\int_{k-1}^k f(k) dx \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq \int_{k-1}^k f(k-1) dx$$

или

$$f(k) \leq \int_{k-1}^k f(x) dx \leq f(k-1).$$

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Эти неравенства установлены для любого номера $k \geq 2$.
Запишем их последовательно для значений k равных $2, 3, \dots, n$, где n – любой номер, превосходящий 2:

$$\begin{aligned} f(2) &\leq \int_1^2 f(x) dx \leq f(1), \\ f(3) &\leq \int_2^3 f(x) dx \leq f(2), \\ &\dots\dots\dots \\ f(n) &\leq \int_{n-1}^n f(x) dx \leq f(n-1). \end{aligned}$$

Складывая почленно записанные неравенства, получим

$$\sum_{k=2}^n f(k) \leq \int_1^n f(x) dx \leq \sum_{k=1}^{n-1} f(k)$$

или, обозначая через S_n n -ю частичную сумму ряда (13),

$$S_n - f(1) \leq a_n \leq S_{n-1}. \quad (16)$$

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Из формулы (14) и неотрицательности функции $f(x)$ следует, что последовательность $\{a_n\}$ является неубывающей. Поэтому для сходимости этой последовательности необходима и достаточна ее ограниченность. В свою очередь, для сходимости ряда (13) в силу теоремы 2 необходима и достаточна ограниченность последовательности $\{S_n\}$. Из неравенств (16) вытекает, что последовательность $\{S_n\}$ ограничена тогда и только тогда, когда ограничена последовательность $\{a_n\}$, то есть тогда и только тогда, когда сходится последовательность $\{a_n\}$. *Теорема доказана.*

Замечание. Фиксируем произвольный номер m . Функцию $f(x)$ можно рассматривать не на $[1, \infty)$, а на полупрямой $[m, \infty)$. Утверждение теоремы 8 остается в силе, если заменить ряд (13) на $\sum_{k=m}^{\infty} f(k)$, а последовательность (14) на

$a_n = \int_m^n f(x) dx, n > m$. Доказательство теоремы при этом изменяется незначительно.

§2. Сходимость рядов с неотрицательными членами.

Пример 6. Применим интегральный признак Коши-Маклорена для выяснения сходимости обобщенного гармонического ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\alpha}}, \quad \alpha \in \mathbb{R}. \quad (17)$$

При $\alpha \leq 0$ общий член ряда не стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, нарушено необходимое условие сходимости ряда, ряд (17) расходится. Рассмотрим случай $\alpha > 0$. Для функции $f(x) = \frac{1}{x^{\alpha}}$ выполняются условия теоремы 8 на полупрямой $x \geq 1$, поэтому вопрос о сходимости ряда (17) эквивалентен вопросу о сходимости последовательности $\{a_n\}$, где

$$a_n = \int_1^n \frac{dx}{x^{\alpha}} = \begin{cases} \frac{n^{1-\alpha}-1}{1-\alpha}, & \alpha \neq 1, \\ \ln n, & \alpha = 1. \end{cases}$$

Из вида элементов a_n вытекает, что последовательность $\{a_n\}$ расходится при $\alpha \leq 1$ и сходится при $\alpha > 1$. Таким образом, ряд (17) сходится при $\alpha > 1$ и расходится при $\alpha \leq 1$.

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов

1. Понятия абсолютно и условно сходящихся рядов.

Изучим теперь свойства рядов, члены которых являются вещественными числами любого знака:

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Определение. Будем называть ряд (1) *а б с о л ю т н о с х о д я щ и м с я*, если сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k|, \quad (2)$$

составленный из модулей членов ряда (1).

Утверждение. Из абсолютной сходимости ряда (1) вытекает его сходимость. Обратное неверно.

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Доказательство. Фиксируем произвольные числа $n, p \in \mathbb{N}$ и запишем очевидное неравенство для суммы конечного числа слагаемых:

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k|. \quad (3)$$

Возьмем любое число $\varepsilon > 0$. Поскольку ряд (2) сходится, то по критерию Коши сходимости числовых рядов (теорема 1) найдется номер N такой, что для всех номеров $n \geq N$ и для любого натурального числа p правая часть неравенства (3) будет меньше числа ε . Но тогда и левая часть неравенства будет меньше ε , что по критерию Коши означает, что ряд (1) сходится.

Для того чтобы доказать, что из сходимости ряда (1) не следует сходимость ряда (2), достаточно привести соответствующий *пример*. Рассмотрим ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots \quad (4)$$

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Рядом из модулей, соответствующим ряду (4), является гармонический ряд, расходимость которого мы доказали тремя способами в §§1,2. Так что ряд (4) абсолютно не сходится. Докажем, что этот ряд сходится и его сумма равна $\ln 2$. Для каждого значения $x \in [0, 1]$ справедлива формула Маклорена для функции $\ln(1+x)$:

$$\ln(1+x) = x - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} - \frac{x^4}{4} + \dots + (-1)^{n-1} \frac{x^n}{n} + R_{n+1}(x),$$

и для остаточного члена R_{n+1} имеет место оценка

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}, \quad \forall x \in [0, 1].$$

Полагая в этих формулах $x = 1$, получим

$$\ln 2 = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \dots + \frac{(-1)^{n-1}}{n} + R_{n+1}(1), \quad |R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1}. \quad (5)$$

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Обозначим через S_n сумму первых n слагаемых в правой части равенства (5). Тогда можем записать:

$$|S_n - \ln 2| = |R_{n+1}(1)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

Так как $1/(n+1) \rightarrow 0$, $n \rightarrow \infty$, то из последнего неравенства следует, что существует предел $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \ln 2$. Поскольку последовательность $\{S_n\}$ является последовательностью частичных сумм ряда (4), то это означает, что ряд (4) сходится и его сумма равна $\ln 2$. *Утверждение доказано.*

Определение. Будем называть ряд (1) *у с л о в н о с х о д я щ и м с я*, если он сходится, а ряд (2) из модулей членов расходится.

Примером условно сходящегося ряда может служить рассмотренный выше ряд (4). В качестве примера абсолютно сходящегося ряда можно рассмотреть ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k^{\alpha}} = 1 - \frac{1}{2^{\alpha}} + \frac{1}{3^{\alpha}} - \frac{1}{4^{\alpha}} + \dots, \quad \text{где } \alpha > 1.$$

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

2. О перестановке членов условно сходящегося ряда.

Одним из важнейших свойств суммы конечного числа вещественных чисел является *переместительное свойство* ($a + b = b + a$). Естественно возникает вопрос, верно ли это для бесконечного числа слагаемых сходящегося числового ряда, т.е. *может ли измениться сумма сходящегося ряда от перестановки членов этого ряда?* Ясно, что если переставить конечное число слагаемых, то сумма ряда не изменится.

Рассмотрим *условно сходящийся* ряд (4), в котором чередуются положительные и отрицательные слагаемые, ряд имеет сумму $S = \ln 2$. Переставим члены ряда (4) так, чтобы после одного положительного члена стояли два отрицательных члена. При этом новых слагаемых в ряде не появляется и все прежние слагаемые присутствуют в новом ряде. В результате такой перестановки получим ряд

$$1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{4} + \frac{1}{3} - \frac{1}{6} - \frac{1}{8} + \dots + \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) + \dots \quad (6)$$

Обозначим n -е частичные суммы ряда (6) через S_n .

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Для того чтобы посчитать предел подпоследовательности $\{S_{3n}\}$ используем полученную в §2 оценку частичных сумм гармонического ряда

$$H_n \equiv \sum_{k=1}^n \frac{1}{k} = \ln n + \mathbb{C} + \alpha_n, \quad \alpha_n = o(1), \quad n \rightarrow \infty.$$

Сгруппируем слагаемые ряда (6) по три и воспользуемся тем фактом, что для конечной суммы слагаемых переместительное свойство справедливо. Можем записать (дополняем выражения в скобках до частичных сумм гармонического ряда):

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

$$\begin{aligned} S_{3n} &= \sum_{k=1}^n \left(\frac{1}{2k-1} - \frac{1}{4k-2} - \frac{1}{4k} \right) = \left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{2n-1} \right) - \\ &- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{4n} \right) = \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \\ &- \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{2n} \right) - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{2n} \right) = \\ &= H_{2n} - \frac{1}{2} \left(1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} \right) - \frac{1}{2} H_{2n} = \frac{1}{2} H_{2n} - \frac{1}{2} H_n = \\ &= \frac{1}{2} (\ln 2n + \mathbb{C} + \alpha_{2n} - \ln n - \mathbb{C} - \alpha_n) = \frac{1}{2} (\ln \frac{2n}{n} + \alpha_{2n} - \alpha_n) = \\ &= \frac{1}{2} \ln 2 + \frac{1}{2} (\alpha_{2n} - \alpha_n) \rightarrow \frac{1}{2} \ln 2 \quad \text{при } n \rightarrow \infty. \end{aligned}$$

Частичные суммы S_{3n-1} и S_{3n-2} отличаются от S_{3n} на бесконечно малые величины (на $\frac{1}{4n}$ и $\frac{1}{4n-2} + \frac{1}{4n}$ соответственно) и потому имеют тот же предел $\frac{1}{2} \ln 2$. Это окончательно доказывает, что ряд (6) сходится и имеет сумму равную $\frac{1}{2} \ln 2$ – в два раза меньшую суммы ряда (4). Таким образом, в результате указанной выше перестановки членов сумма условно сходящегося ряда (4) изменилась.

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Рассмотренный пример показывает, что условно сходящийся ряд *не обладает переместительным свойством*.

Задача 1. Примените изложенную схему вычисления суммы ряда (6) для вычисления суммы ряда (4).

Задача 2. Совершим другую перестановку ряда (4): после двух положительных членов следует один отрицательный, получим ряд

$$1 + \frac{1}{3} - \frac{1}{2} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11} - \frac{1}{6} + \dots$$

Покажите, что сумма полученного ряда равна $\frac{3}{2} \ln 2$, т.е. вновь изменилась (можно использовать изложенную выше схему вычисления суммы ряда (6)).

Следующее замечательное (и неожиданное) утверждение вносит полную ясность в вопрос о влиянии перестановок членов на сумму условно сходящегося ряда.

Теорема 9 (теорема Римана [†]). *Если ряд (1) сходится условно, то каково бы ни было наперед взятое вещественное число L , можно так переставить члены этого ряда, чтобы преобразованный ряд сходил к числу L .*

Доказательство. Пусть ряд (1) – произвольный условно сходящийся ряд. Изучим его структуру. Из необходимого условия сходимости числового ряда следует, что $\{u_k\}$ является бесконечно малой последовательностью при $k \rightarrow \infty$.

Обозначим через $p_1, p_2, p_3, \dots$ неотрицательные члены ряда (1), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде, а через $q_1, q_2, q_3, \dots$ – модули отрицательных членов ряда (1), выписанные в таком же порядке, в каком они стоят в этом ряде. Ряд (1) содержит бесконечное число как положительных, так и отрицательных членов, ибо если бы членов одного знака было бы конечное число, то отбросив не влияющее на сходимость конечное число первых членов, мы бы получили ряд, состоящий из членов одного знака, для которого сходимость означала бы абсолютную сходимость.

[†]Бернгард Риман – немецкий математик (1826 – 1866).

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Так как $\{u_k\}$ является бесконечно малой последовательностью при $k \rightarrow \infty$, то $\{p_k\}$ и $\{q_k\}$ также являются бесконечно малыми последовательностями.

Итак, с рядом (1) связаны два бесконечных ряда с неотрицательными членами $\sum_{k=1}^{\infty} p_k$ и $\sum_{k=1}^{\infty} q_k$. Будем обозначать первый из этих рядов символом P , а второй – символом Q . Докажем, что оба ряда P и Q являются расходящимися. Обозначим n -ю частичную сумму ряда (1) символом S_n , символом P_n – сумму всех положительных членов, входящих в S_n , символом Q_n – сумму модулей всех отрицательных членов, входящих в S_n . Тогда, очевидно, $S_n = P_n - Q_n$, и так как по условию ряд (1) сходится к некоторому числу S , то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n - Q_n) = S. \quad (7)$$

С другой стороны, так как ряд (1) не сходится абсолютно, то

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (P_n + Q_n) = +\infty. \quad (8)$$

Из (7), (8) получим $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n, Q_n = +\infty$, т.е. оба ряда P и Q расходятся.

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Из расходимости рядов P и Q вытекает, что даже после удаления любого конечного числа первых членов этих рядов, мы можем взять из оставшихся членов как ряда P , так и ряда Q столь большое число членов, что их сумма превзойдет любое наперед взятое число.

Опираясь на этот факт докажем, что можно так переставить члены исходного ряда (1), что в результате получится ряд, сходящийся к наперед взятому числу L .

В самом деле, мы получим требуемый ряд следующим образом. Сначала выберем из исходного ряда (1) *ровно столько* неотрицательных членов $p_1, p_2, p_3, \dots, p_{k_1}$, чтобы их сумма превзошла L : $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{k_1} > L$ (при этом $p_1 + p_2 + p_3 + \dots + p_{k_1-1} \leq L$). Затем добавим к выбранным членам *ровно столько* отрицательных членов $-q_1, -q_2, -q_3, \dots, -q_{k_2}$, чтобы общая сумма $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2}$ оказалась меньше L . Затем снова добавим *ровно столько* положительных членов $p_{k_1+1}, p_{k_1+2}, \dots, p_{k_3}$, чтобы общая сумма $p_1 + p_2 + \dots + p_{k_1} - q_1 - q_2 - \dots - q_{k_2} + p_{k_1+1} + p_{k_1+2} + \dots + p_{k_3}$, оказалась больше L .

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Продолжая аналогичные рассуждения далее, мы получим бесконечный ряд, в состав которого войдут *все члены* исходного ряда (1), так как каждый раз нам придется добавлять *хотя бы один* положительный или отрицательный член исходного ряда.

Докажем, что полученный ряд сходится к L . Заметим, что в полученном ряде последовательно чередуются *группы неотрицательных* и *группы отрицательных* членов. Если частичная сумма полученного ряда заканчивается *полностью завершенной группой*, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего ее члена (ибо мы добавляем в данную группу члены ровно до тех пор, пока общая сумма "не перейдет" через число L). Если же частичная сумма заканчивается *не полностью завершенной группой*, то отклонение этой частичной суммы от числа L не превосходит модуля последнего члена предпоследней из групп. Для установления сходимости ряда к L достаточно убедиться в том, что модули последних членов групп образуют бесконечно малую последовательность, а это непосредственно вытекает из необходимого условия сходимости исходного ряда (1).

Теорема Римана доказана.

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Задача. Докажите, что если ряд сходится условно, то можно так переставить его члены, что вновь полученный ряд *будет расходящимся*.

При этом, если $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм полученного ряда, то возможна каждая из следующих трех ситуаций:

- 1) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = +\infty$,
- 2) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = -\infty$,
- 3) $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = \infty$.

3. О перестановке членов абсолютно сходящегося ряда.

Докажем, что для всякого абсолютно сходящегося ряда справедливо переместительное свойство.

Теорема 10 (теорема Коши). Если данный ряд сходится абсолютно, то любой ряд, полученный из данного ряда посредством некоторой перестановки членов, также сходится абсолютно и имеет ту же сумму, что и данный ряд.

Доказательство. Пусть ряд (1) с общим членом u_k сходится абсолютно и сумма этого ряда равна S . Пусть, далее,

$$\sum_{k=1}^{\infty} u'_k \quad (9)$$

– ряд, полученный из ряда (1) посредством некоторой перестановки его членов. Требуется доказать, что 1) ряд (9) сходится и имеет сумму, равную S , 2) ряд (9) сходится абсолютно. Докажем сначала первое утверждение. Достаточно доказать, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad \left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| < \varepsilon. \quad (10)$$

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд (1) сходится абсолютно, то для выбранного ε можно указать номер N_0 такой, что для остатка ряда из модулей справедлива оценка

$$\sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (11)$$

Выберем столь большой номер N , чтобы любая частичная сумма S'_n нового ряда (9) с номером $n > N$, содержала *все первые N_0 членов ряда (1)*. Такой номер N выбрать можно, так как ряд (9) получается из ряда (1) посредством некоторой перестановки членов. Тогда разность S'_n с $n > N$ и первых N_0 слагаемых ряда (1) содержит только слагаемые ряда (1) с номерами большими, чем N_0 . Разность суммы S и первых N_0 слагаемых ряда (1) также содержит только слагаемые ряда (1) с номерами большими, чем N_0 . Для установления оценки (10) добавим и вычтем под знаком модуля сумму первых N_0 членов ряда (1) и два раза применим оценку (11). Получим

§3. О перестановке слагаемых сходящихся числовых рядов.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=1}^n u'_k - S \right| &= \left| \left(\sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right) + \left(\sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right) \right| \leq \\ &\leq \left| \sum_{k=1}^n u'_k - \sum_{k=1}^{N_0} u_k \right| + \left| \sum_{k=1}^{N_0} u_k - S \right| \leq \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| + \sum_{k=N_0+1}^{\infty} |u_k| < \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Соотношение (10) доказано, то есть ряд (9) сходится и имеет сумму равную S .

Остается доказать утверждение 2) о том, что ряд (9) сходится *абсолютно*. Доказательство этого утверждения следует из утверждения 1), если применить его к рядам

$$\sum_{k=1}^{\infty} |u_k| \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} |u'_k|. \quad (12)$$

При этом мы докажем сходимость второго из рядов (12), то есть абсолютную сходимость ряда (9) (и докажем равенство сумм рядов (12)). *Теорема доказана.*

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов

Изучим вопрос о возможности почленного сложения и перемножения сходящихся числовых рядов. Рассмотрим ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k \quad \text{и} \quad \sum_{k=1}^{\infty} v_k, \quad u_k, v_k \in \mathbb{R}, \quad (1)$$

их n -е частичные суммы соответственно U_n и V_n .

Теорема 11. Если ряды (1) сходятся и имеют суммы, соответственно равные U и V , то и ряд $\sum_{k=1}^{\infty} (u_k \pm v_k)$ сходится и имеет сумму, равную $U \pm V$.

Доказательство. Для доказательства теоремы запишем следующую очевидную цепочку соотношений:

$$S_n = \sum_{k=1}^n (u_k \pm v_k) = U_n \pm V_n \rightarrow U \pm V \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Теорема доказана.

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

Из доказанной теоремы 11 следует, что сходящиеся числовые ряды можно *почленно* складывать и вычитать. Произвольным образом ряды в общем случае складывать и вычитать нельзя, так как это равносильно перестановке слагаемых в исходных рядах, что может повлиять на суммы этих рядов.

Докажем два утверждения об умножении рядов.

Теорема 12. *Если оба ряда (1) сходятся абсолютно и имеют суммы, соответственно равные U и V , то ряд, составленный из всех произведений вида $u_k v_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, занумерованных в каком угодно порядке, сходится абсолютно и его сумма равна произведению UV .*

Доказательство. Обозначим через $w_1, w_2, w_3, \dots$ произведения вида $u_k v_l$, $k, l \in \mathbb{N}$, занумерованные в каком угодно порядке. Докажем, что ряд $\sum_{i=1}^{\infty} |w_i|$ сходится. Обозначим n -ю частичную сумму этого ряда через S_n . Фиксируем произвольный номер n . Сумма S_n состоит из слагаемых вида $|u_k v_l|$. Среди индексов k и l таких слагаемых, входящих в сумму S_n , найдется наибольший индекс, обозначим его через p . Тогда справедлива оценка

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

$$S_n \leq (|u_1| + |u_2| + \dots + |u_p|)(|v_1| + |v_2| + \dots + |v_p|). \quad (2)$$

В правой части неравенства (2) стоит произведение p -х частичных сумм сходящихся рядов с неотрицательными членами $\sum |u_k|$ и $\sum |v_k|$. Согласно теореме 2, все частичные суммы этих рядов *ограничены*. Поэтому *ограничена* и последовательность частичных сумм $\{S_n\}$, что доказывает сходимость ряда $\sum |w_i|$, то есть *абсолютную* сходимость ряда $\sum w_i$. Обозначим сумму последнего ряда через S .

Докажем, что $S = UV$. Так как ряд сходится абсолютно, то по теореме Коши (теорема 10) *его сумма S не зависит от порядка, в котором мы его суммируем*. Любая последовательность и подпоследовательность частичных сумм этого ряда сходится к числу S . Но тогда $S = UV$, так как именно к этому числу сходится подпоследовательность W_m частичных сумм этого ряда вида

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

$$W_m = (u_1 + u_2 + \dots + u_m)(v_1 + v_2 + \dots + v_m).$$

Теорема доказана.

В теореме 12 наложено весьма жесткое условие абсолютной сходимости каждого из рядов (1). Ослабить это условие можно, если перемножать ряды (1) по специальному *правилу Коши*:

$$\begin{aligned} \left(\sum_{k=1}^{\infty} u_k \right) \left(\sum_{k=1}^{\infty} v_k \right) &= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + \\ &+ (u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} w_k, \end{aligned} \quad (3)$$

где $w_k = u_1 v_k + u_2 v_{k-1} + \dots + u_k v_1$.

Теорема 13 (теорема Мертенса *). Пусть ряды (1) сходятся и хотя бы один из них сходится абсолютно. Тогда ряд, полученный перемножением этих рядов по правилу Коши (3), сходится к произведению сумм перемножаемых рядов.

* Франц Карл Йозеф Мертенс – немецкий математик (1840 – 1927).

Доказательство. Пусть, например, ряд $\sum u_k$ сходится

абсолютно, а ряд $\sum v_k$ сходится (хотя бы условно). Обозначим n -е частичные суммы перемножаемых рядов соответственно через U_n и V_n , а их суммы соответственно через U и V .

Положим $W_n = w_1 + w_2 + \dots + w_n$ — это n -е частичные суммы ряда (3). Достаточно доказать, что $\lim_{n \rightarrow \infty} W_n = UV$.

Так как ряд $\sum v_k$ сходится, то его остаток $\alpha_n = V - V_n$

является бесконечно малой, а следовательно, и ограниченной последовательностью, то есть найдется постоянная $M > 0$ такая, что $|\alpha_n| \leq M$ для всех номеров n . Преобразуем частичные суммы W_n следующим образом:

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

$$\begin{aligned} W_n &= u_1 v_1 + (u_1 v_2 + u_2 v_1) + \dots + (u_1 v_n + u_2 v_{n-1} + \dots + u_n v_1) = \\ &= u_1 V_n + u_2 V_{n-1} + \dots + u_n V_1 = \\ &= u_1(V - \alpha_n) + u_2(V - \alpha_{n-1}) + \dots + u_n(V - \alpha_1) = \\ &= U_n V - \beta_n, \quad \text{где} \quad \beta_n = u_1 \alpha_n + u_2 \alpha_{n-1} + \dots + u_n \alpha_1. \end{aligned}$$

Поскольку $U_n \rightarrow U$ при $n \rightarrow \infty$, то достаточно доказать, что последовательность $\{\beta_n\}$ является бесконечно малой.

Выпишем необходимые оценки. Фиксируем произвольное положительное число $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum |u_k|$ сходится, то последовательность его частичных сумм ограничена,

$$\exists M_1 > 0 : \quad \sum_{k=1}^n |u_k| \leq M_1 \quad \forall n \in \mathbb{N}, \quad (4)$$

и

$$\exists m \in \mathbb{N} : \quad \sum_{k=m+1}^{\infty} |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M}. \quad (5)$$

§4. Сложение и умножение сходящихся числовых рядов.

Из того, что $\alpha_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$ заключаем, что

$$\exists n_1 \in \mathbb{N} : \quad \forall n > n_1 \quad |\alpha_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1}. \quad (6)$$

Представим β_n в следующем виде:

$$\beta_n = (u_1\alpha_n + \dots + u_m\alpha_{n-m+1}) + (u_{m+1}\alpha_{n-m} + \dots + u_n\alpha_1). \quad (7)$$

Будем рассматривать номера n , удовлетворяющие условию $n - m > n_1$, то есть $n > m + n_1$. Применим для слагаемых в первой скобке в (7) оценку (6), затем оценку (4), а для слагаемых во второй скобке – оценку $|\alpha_k| \leq M$, а затем оценку (5), получим

$$|\beta_n| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \sum_{k=1}^m |u_k| + M \sum_{k=m+1}^n |u_k| < \frac{\varepsilon}{2M_1} \cdot M_1 + M \cdot \frac{\varepsilon}{2M} = \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon,$$

$\forall n > N = m + n_1$, то есть $\beta_n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$.

Теорема доказана.

Замечание. Мы показали, что перемножение рядов по правилу Коши позволяет освободиться от требования абсолютной сходимости одного из перемножаемых рядов. Освободиться от условия абсолютной сходимости и второго из перемножаемых рядов в общем случае нельзя. Если оба ряда (1) сходятся условно, то почленное перемножение их даже по правилу Коши приводит, вообще говоря, к расходящемуся ряду (см. следующие задачи 1 и 2).

Задача 1. Пусть $u_k = v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{\sqrt{k}}$, ряды (1) сходятся условно.

Покажите, что ряд, получаемый перемножением рядов (1) по правилу Коши (3) расходится (нарушается необходимое условие сходимости ряда).

Задача 2. Пусть $u_k = v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}$, ряды (1) сходятся условно.

Покажите, что ряд, получаемый перемножением рядов (1) по правилу Коши (3) сходится (его сумма равна $\ln^2 2$, то есть произведению сумм перемножаемых рядов).

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов

Рассмотрим произвольный числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k, \quad u_k \in \mathbb{R}. \quad (1)$$

Для установления *абсолютной сходимости* ряда (1) можно применять любой из признаков §2 (признаки сравнения, Даламбера, Коши, интегральный признак Коши-Маклорена). Признаки Даламбера и Коши можно применять и для установления расходимости ряда (1), так как в случае расходимости ряда из модулей эти признаки показывают, что общий член ряда не стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то есть нарушается необходимое условие сходимости ряда (1). Однако ни один из указанных признаков не позволяет судить о сходимости *условно* сходящегося ряда.

Здесь мы рассмотрим несколько признаков сходимости, позволяющих устанавливать сходимость ряда (1) и в тех случаях, когда этот ряд не является абсолютно сходящимся.

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Предварительно изучим два вспомогательных вопроса – о свойствах последовательностей с ограниченным изменением и выведем одно важное тождество (тождество или преобразование Абеля [†]), представляющее основной инструмент для установления формулируемых ниже признаков.

1. Последовательности с ограниченным изменением.

Определение. Последовательность $\{v_k\}$ назовем *последовательностью с ограниченным изменением*, если сходится числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1} - v_k| = |v_2 - v_1| + |v_3 - v_2| + \dots \quad (2)$$

Сумму ряда (2), в случае его сходимости, обозначим через V . Число V называется *полным изменением* последовательности $\{v_k\}$.

Пример 1. Последовательность с общим членом $v_k = k$, очевидно имеет неограниченное изменение ($v_{k+1} - v_k = 1$ и ряд (2) расходится).

[†]Нильс Генрих Абель – норвежский математик (1802 – 1829).

Пример 2. Последовательность с общим членом $v_k = \frac{1}{k}$ имеет ограниченное изменение:

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n (v_k - v_{k+1}) = \left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{3}\right) + \dots + \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) = \\ &= 1 - \frac{1}{n+1} \rightarrow 1 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ряд (2) сходится.

Заметим, что общий член последовательности с ограниченным изменением не обязан стремиться к нулю. Так, в примере 2 можно было взять $v_k = 100 + \frac{1}{k}$, результат будет тот же.

Пример 3. Покажем, что не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение. Пусть

$$v_k = \frac{(-1)^{k-1}}{k}. \quad \text{Тогда}$$

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \left| -\frac{1}{2} - 1 \right| + \left| \frac{1}{3} + \frac{1}{2} \right| + \left| -\frac{1}{4} - \frac{1}{3} \right| + \dots + \\ &+ \left| (-1)^k \left(\frac{1}{n+1} + \frac{1}{n} \right) \right| = 2 \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) - 1 + \frac{1}{n+1} = \\ &= 2H_n - 1 + \frac{1}{n+1} \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \end{aligned}$$

ряд (2) расходится, сходящаяся к нулю последовательность $\{v_k\}$ не имеет ограниченного изменения. Мы использовали обозначение H_n для частичной суммы гармонического ряда и установленный в п. 2 §2 факт: $H_n = \ln n + \mathbb{C} + o(1)$.

Сформулируем *необходимое условие* для последовательностей с ограниченным изменением.

Утверждение 1. *Всякая последовательность с ограниченным изменением сходится. Обратное неверно.*

Доказательство. То, что не всякая сходящаяся последовательность имеет ограниченное изменение, следует из рассмотренного примера 3. Заметим далее, что из сходимости ряда (2) вытекает сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1} - v_k). \quad (3)$$

Обозначим сумму ряда (3) через S , а его n -ю частичную сумму – через S_n . Поскольку $S_n = (v_2 - v_1) + (v_3 - v_2) + \dots + (v_{n+1} - v_n) = v_{n+1} - v_1$, то $v_{n+1} = S_n + v_1 \rightarrow S + v_1$ при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что последовательность $\{v_n\}$ сходится к пределу $S + v_1$. *Утверждение доказано.*

Сформулируем теперь *достаточное условие* для того чтобы последовательность имела ограниченное изменение.

Утверждение 2. *Всякая монотонная ограниченная последовательность является последовательностью с ограниченным изменением.*

Доказательство. Так как последовательность $\{v_k\}$ является монотонной и ограниченной, то она сходится. Обозначим ее предел через v . Обозначим n -ю частичную сумму ряда (2) через S_n . Так как последовательность $\{v_k\}$ является монотонной, то все разности $v_{k+1} - v_k$ имеют один знак (все неположительны или все неотрицательны). Но тогда

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

$$S_n = \sum_{k=1}^n |v_{k+1} - v_k| = \left| \sum_{k=1}^n (v_{k+1} - v_k) \right| = |v_{n+1} - v_1| \rightarrow |v - v_1|$$

при $n \rightarrow \infty$. Это означает, что ряд (2) сходится, его сумма равна $V = |v - v_1|$, а последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение. *Утверждение доказано.*

Задача. Докажите критерий того, что последовательность имеет ограниченное изменение.

Утверждение 3. Для того чтобы последовательность имела ограниченное изменение, необходимо и достаточно, чтобы ее общий член можно было представить в виде разности двух ограниченных неубывающих последовательностей.

2. Преобразование Абеля. В интегральном исчислении важную роль играет формула интегрирования по частям. Приведем аналог этой формулы для рядов.

Утверждение 4. Пусть $\{u_k\}$ и $\{v_k\}$ – две произвольные последовательности, $S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n$, $S_0 = u_0 = 0$, n и p – два произвольных номера. Тогда справедливо тождество

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n, \quad (4)$$

называемое *тождеством Абеля* или *преобразованием Абеля*.

Если переписать тождество (4) в виде

$$\sum_{k=n}^{n+p} v_k \Delta S_k = S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k \Delta v_k,$$

где $\Delta S_k = S_k - S_{k-1} = u_k$, $\Delta v_k = v_{k+1} - v_k$, то достаточно наглядно просматривается связь этого тождества и формулы интегрирования по частям для определенных интегралов.

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Доказательство утверждения. Подставим в левую часть формулы (4) вместо u_k разность $u_k = S_k - S_{k-1}$, и во второй из получаемых при этом сумм заменим индекс суммирования k на $k + 1$, получим

$$\begin{aligned}\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k &= \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p} S_{k-1} v_k = \sum_{k=n}^{n+p} S_k v_k - \sum_{k=n-1}^{n+p-1} S_k v_{k+1} = \\&= S_{n+p} v_{n+p} + \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_k - \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k v_{k+1} - S_{n-1} v_n = \\&= \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n,\end{aligned}$$

откуда следует формула (4). *Утверждение доказано.*

Для применения критерия Коши сходимости числовых рядов тождество (4) удобно записать в следующем виде

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \quad p \neq 1, \quad (5)$$

при $p = 1$ в правой части (5) первую сумму заменяем нулем. 

3. Признаки сходимости. Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k v_k, \quad (6)$$

обозначим $\{S_n\}$ – последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (7)$$

Теорема 14 (Два признака Абеля.) *I. Пусть выполняются следующие условия*

- 1) последовательность $\{S_n\}$ является ограниченной;*
- 2) $\{v_k\}$ – бесконечно малая последовательность с ограниченным изменением. Тогда ряд (6) сходится.*

II. Пусть выполняются следующие условия

- 1) ряд (7) сходится;*
- 2) $\{v_k\}$ – последовательность с ограниченным изменением. Тогда ряд (6) сходится.*

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Доказательство. I. Выпишем оценки, вытекающие из условий первого признака. По условию существует число $M > 0$ такое, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (7) удовлетворяет условию $|S_n| \leq M$. Поскольку последовательность $\{v_k\}$ сходится к нулю и имеет ограниченное изменение, то фиксируя произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем по нему номер N такой, что при $n \geq N$ и для любого натурального p справедливы неравенства

$$|v_n| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad (8)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1} - v_k| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (9)$$

Для доказательства сходимости ряда (6) воспользуемся критерием Коши (теорема 1) и выписанными оценками. Применим тождество Абеля (5), от модуля суммы перейдем к сумме модулей, в каждом слагаемом оценим $|S_n| \leq M$ и используем оценки (8), (9). При $n \geq N$

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) \right| + |S_{n+p} v_{n+p}| + |S_n v_{n+1}| \leq \\ &\leq M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |(v_k - v_{k+1})| + |v_{n+p}| + |v_{n+1}| \right) < \\ &< M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \right) = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (6) сходится.

II. Выпишем оценки, вытекающие из условий второго признака.

Так как ряд (7) сходится, то существует число $M > 0$ такое, что последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (7)

удовлетворяет условию $|S_n| \leq M$. Поскольку

последовательность $\{v_k\}$ имеет ограниченное изменение, то

фиксировав произвольное число $\varepsilon > 0$, найдем по нему номер

N такой, что при $n \geq N$ и для любого натурального p

справедливо неравенство (9).

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Обозначим сумму ряда (7) через S , а предел последовательности $\{v_k\}$ через v (согласно утверждению 1, последовательность $\{v_k\}$ сходится). Но тогда $S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n \rightarrow Sv - Sv = 0$ и найдется номер N такой, что при $n \geq N$ и для любого натурального p справедливо неравенство

$$|S_{n+p}v_{n+p} - S_{n-1}v_n| < \frac{2\varepsilon}{3}. \quad (10)$$

Для доказательства сходимости ряда (6) также воспользуемся критерием Коши и выписанными оценками. Применим тождество Абеля (5), от модуля суммы перейдем к сумме модулей, в первом слагаемом оценим $|S_n| \leq M$, далее используем оценки (9), (10). При $n \geq N$

$$\begin{aligned} \left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k \right| &\leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) \right| + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| \leq \\ &\leq M \left(\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k - v_{k+1}| \right) + |S_{n+p}v_{n+p} - S_n v_{n+1}| < M \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{2\varepsilon}{3} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Таким образом, ряд (6) сходится. *Теорема доказана.*

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Сформулируем еще два признака сходимости, широко применяемые при исследовании рядов и являющиеся следствиями первого признака Абеля.

Теорема 15 (признак Дирихле[‡]-Абеля). *Рассмотрим ряд (6). Пусть выполняются следующие условия*

- 1) ряд (7) обладает ограниченной последовательностью частичных сумм;*
- 2) последовательность $\{v_k\}$ является невозрастающей бесконечно малой последовательностью. Тогда ряд (6) сходится.*

Доказательство. Первое условие первого признака Абеля выполнено. По утверждению 2 последовательность $\{v_k\}$ (монотонная и ограниченная) имеет ограниченное изменение, то есть и второе условие признака Абеля выполнено. Следовательно, по первой части теоремы 14 ряд (6) сходится. *Теорема доказана.*

[‡]Петер Густав Лежен-Дирихле – немецкий математик (1805 – 1859). 

Теорема 16 (признак Лейбница [§]). *Рассмотрим знакочередующийся ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} p_k = p_1 - p_2 + p_3 - p_4 + \dots, \quad p_k > 0. \quad (11)$$

Если модули членов ряда (11) образуют невозрастающую бесконечно малую последовательность, то этот ряд сходится.

Доказательство. Поставим в соответствие ряду (11) ряд (6), где положим $u_k = (-1)^{k-1}$, $v_k = p_k$. Тогда соответствующий ряд (7) имеет ограниченную последовательность частичных сумм (в качестве постоянной M можно взять $M = 1$) и выполняются все условия первого признака Абеля (и все условия признака Дирихле-Абеля), что доказывает сходимость ряда (11). *Теорема доказана.*

[§] Готфрид Вильгельм Лейбниц – немецкий философ и математик (1646–1716). ▶ ◀ ≡ ≡ ≡

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Пример. Исследуем на абсолютную и условную сходимость следующий числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^{\alpha}}, \quad (13)$$

где α и x – некоторые фиксированные вещественные числа.

При $\alpha \leq 0$ нарушено необходимое условие сходимости ряда, ряд (13) расходится для любого значения x .

Если $\alpha > 1$, то из оценки $\frac{|\cos kx|}{k^{\alpha}} \leq \frac{1}{k^{\alpha}}$, справедливой для всех значений x , и сходимости обобщенного гармонического ряда при $\alpha > 1$, заключаем, что ряд (13) сходится абсолютно для всех значений x (первый признак сравнения – теорема 3).

Пусть $\alpha \in (0, 1]$. Поскольку обобщенный гармонический ряд при таких значениях α расходится (см. §2), то при x кратных 2π ряд (13) расходится ($\cos kx = 1$).

Рассмотрим значения x не кратные 2π , $x \neq 2\pi n, n \in \mathbb{Z}$. Представим ряд (13) в виде ряда (6), положив $u_k = \cos kx$, $v_k = \frac{1}{k^{\alpha}}$.

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Оценим последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ряда (7). Умножим S_n на $2 \sin \frac{x}{2}$ и воспользуемся тригонометрической формулой

$$2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x,$$

справедливой для любого номера k . Эта формула позволяет существенно упростить выражение для частичной суммы. Действительно,

$$\begin{aligned} 2 \sin \frac{x}{2} S_n &= \sum_{k=1}^n 2 \sin \frac{x}{2} \cos kx = \sum_{k=1}^n [\sin(k + \frac{1}{2})x - \sin(k - \frac{1}{2})x] = \\ &= [\sin \frac{3}{2}x - \sin \frac{x}{2}] + [\sin \frac{5}{2}x - \sin \frac{3}{2}x] + \dots + [\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin(n - \frac{1}{2})x] = \sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}. \end{aligned}$$

Отсюда

$$S_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Таким образом, для любого x , не кратного 2π , последовательность частичных сумм $\{S_n\}$ ограничена:

$$|S_n| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|}.$$

Последовательность $\{v_k\}$ монотонно стремится к нулю, поэтому по теореме 15 (или по теореме 14.1) ряд (13) сходится. Каков при этом характер сходимости ряда, абсолютный или условный, мы пока сказать не можем.

Покажем, что при рассматриваемых значениях α ряд из модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\cos kx|}{k^{\alpha}}, \quad (14)$$

расходится при всех значениях x . Если x кратно π , то $|\cos kx| = 1$ и ряд (14) расходится. Пусть x не кратно π , $x \neq \pi l, l \in \mathbb{Z}$. Воспользуемся первым признаком сравнения (теорема 3). Поскольку $|\cos kx| \leq 1$ для всех значений $k \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{R}$, то $|\cos kx| \geq \cos^2 kx$.

§5. Признаки сходимости произвольных числовых рядов.

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos^2 kx}{k^\alpha} \quad (15)$$

расходится при всех значениях x не кратных π , откуда по теореме 3 получим, что ряд (14) тоже расходится.

Применим тригонометрическую формулу $\cos^2 kx = \frac{1}{2}(1 + \cos 2kx)$. Ряд с общим членом $\frac{1}{2k^\alpha}$ при $\alpha \in (0, 1]$ расходится. Если мы покажем, что ряд с общим членом $\frac{\cos 2kx}{2k^\alpha}$ сходится при всех значениях x не кратных π , то получим, что ряд (15) расходится при этих значениях x . Сходимость ряда с общим членом $\frac{\cos 2kx}{2k^\alpha}$ при x не кратных π доказывается в точности по той же схеме, что и сходимость ряда (13) при x не кратных 2π , только частичные суммы теперь мы умножаем не на $\sin \frac{x}{2}$, а на $\sin x$. Это завершает обоснование расходимости ряда (14). Таким образом, при x не кратных 2π ряд (13) сходится условно.

Итак, ряд (13) сходится абсолютно при $\alpha > 1$ при всех значениях $x \in \mathbb{R}$ и сходится условно при $\alpha \in (0, 1]$ при x не кратных 2π .

§6. Бесконечные произведения

К понятию числового ряда близко примыкает понятие *бесконечного числового произведения*. Пусть дана бесконечная числовая последовательность $\{v_k\}$. Перемножим ее элементы. Формально записанное выражение

$$v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_k \cdot \dots = \prod_{k=1}^{\infty} v_k \quad (1)$$

называется *бесконечным произведением*. Элементы v_k называются членами данного бесконечного произведения. Произведение первых n членов данного бесконечного произведения обозначим через P_n и назовем n -м частичным произведением:

$$P_n = v_1 \cdot v_2 \cdot \dots \cdot v_n = \prod_{k=1}^n v_k.$$

Определение. Бесконечное произведение (1) называется сходящимся, если последовательность его частичных произведений $\{P_n\}$ имеет конечный предел P , отличный от нуля^{*}.

В случае сходимости бесконечного произведения (1) указанный предел P называют значением бесконечного произведения и записывают

$$P = \prod_{k=1}^{\infty} v_k$$

(последнее равенство имеет смысл лишь для сходящихся бесконечных произведений).

Как и для числовых последовательностей, на сходимость бесконечного произведения не влияет удаление любого конечного числа членов этого произведения (если среди этих членов нет равных нулю).

^{*} Тот факт, что при $P = 0$ бесконечное произведение принято считать расходящимся, хотя и носит условный характер, но позволяет провести четкую аналогию между сходимостью рядов и бесконечных произведений.

§6. Бесконечные произведения.

Поскольку бесконечное произведение, у которого хотя бы один член равен нулю, согласно принятому выше определению считается расходящимся, то мы в дальнейшем вообще *исключим из рассмотрения бесконечные произведения, у которых хотя бы один член равен нулю.*

Теорема 17 (необходимое условие сходимости бесконечного произведения). Если бесконечное произведение (1) сходится, то $v_k \rightarrow 1$ при $k \rightarrow \infty$.

Доказательство. Пусть бесконечное произведение (1) сходится и имеет значение P , отличное от нуля. Тогда $\lim_{k \rightarrow \infty} P_{k-1} = \lim_{k \rightarrow \infty} P_k = P \neq 0$. Поскольку $v_k = P_k/P_{k-1}$, то существует предел $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = P/P = 1$. Теорема доказана.

Пример. Найти значение бесконечного произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^k} \dots, \quad (2)$$

где $x \in \mathbb{R}$ – любое фиксированное число.

Заметим, что для бесконечного произведения (2) выполнено необходимое условие сходимости.

§6. Бесконечные произведения.

Если $x = 0$, то $\cos \frac{x}{2^k} = 1$ для всех номеров k и значение произведения $P = 1$. Зафиксируем любое значение $x \neq 0$. Подсчитаем n -е частичное произведение

$$P_n = \cos \frac{x}{2} \cos \frac{x}{4} \dots \cos \frac{x}{2^n}. \quad (3)$$

Рассмотрим номера n настолько большие, что для данного значения x значение $\sin \frac{x}{2^n} \neq 0$. Умножим и разделим правую часть равенства (3) на $\sin \frac{x}{2^n}$ и в числителе полученной дроби последовательно (n раз) используем тригонометрическую формулу $\sin y \cos y = \frac{1}{2} \sin 2y$. В результате получим

$$P_n = \frac{\sin x}{2^n \sin \frac{x}{2^n}} = \frac{\sin x}{x} \cdot \frac{\frac{x}{2^n}}{\sin \frac{x}{2^n}} \rightarrow \frac{\sin x}{x} \quad \text{при } n \rightarrow \infty$$

(первый замечательный предел). Поскольку $\sin x = 0$ при $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}$, то при $x \neq \pi k, k \in \mathbb{Z}$ бесконечное произведение (2) сходится и имеет значение $\frac{\sin x}{x}$. Справедливо равенство

$$\prod_{k=1}^{\infty} \cos \frac{x}{2^k} = \frac{\sin x}{x}. \quad (4)$$

§6. Бесконечные произведения.

Доопределив правую часть (4) в точке $x = 0$ единицей, получаем, что равенство (4) верно и для $x = 0$. Наконец заметим, что в точках $x = \pi k, k \in \mathbb{Z}, k \neq 0$ равенство (4) тоже верно, так как обе части его обращаются в нуль (в левой части найдется сомножитель, для которого $\frac{x}{2^k} = \frac{\pi n}{2^k} = \frac{\pi}{2} + \pi m$ для некоторого значения $m \in \mathbb{Z}$ и этот сомножитель равен нулю). Таким образом, равенство (4) верно для всех значений $x \in \mathbb{R}$.

Установим два *критерия сходимости бесконечных произведений*. Эти критерии будут сформулированы в терминах сходимости некоторых числовых рядов.

Если бесконечное произведение (1) сходится, то согласно теореме 17 $\lim_{k \rightarrow \infty} v_k = 1$ и все его члены v_k , начиная с некоторого номера k_0 положительны. Поскольку конечное число первых членов не влияет на сходимость бесконечного произведения, то при изучении вопроса о сходимости бесконечных произведений мы, не ограничивая общности, можем рассматривать лишь такие бесконечные произведения, у которых все члены положительны.

Теорема 18. Для того чтобы бесконечное произведение (1) с положительными членами сходилось, необходимо и достаточно, чтобы сходился ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln v_k. \quad (5)$$

В случае сходимости значение P произведения (1) и сумма S ряда (5) связаны формулой $P = e^S$.

Доказательство. Обозначим через P_n n -е частичное произведение бесконечного произведения (1), а через S_n n -ю частичную сумму ряда (5). Тогда

$$S_n = \sum_{k=1}^n \ln v_k = \ln \prod_{k=1}^n v_k = \ln P_n, \quad P_n = e^{S_n}.$$

В силу непрерывности показательной функции для всех значений аргумента и непрерывности логарифмической функции для всех положительных значений аргумента, последовательность P_n сходится тогда и только тогда, когда сходится последовательность S_n .

§6. Бесконечные произведения.

причем, если $\lim_{n \rightarrow \infty} S_n = S$, то $\lim_{n \rightarrow \infty} P_n = e^S$. Теорема доказана.

При исследовании на сходимость бесконечного произведения оказывается удобным представить это бесконечное произведение в виде

$$\prod_{k=1}^{\infty} (1 + u_k) = (1 + u_1)(1 + u_2) \dots (1 + u_k) \dots, \quad (6)$$

в соответствии с принятым выше предположением, мы считаем, что все $u_k > -1$, т. е. $1 + u_k > 0$. При этом условии согласно теореме 18 сходимость бесконечного произведения (6) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \ln(1 + u_k). \quad (7)$$

Установим еще один критерий сходимости бесконечного произведения (6), но уже без логарифмов.

Теорема 19. Если все u_k , начиная с некоторого номера $k_0 \geq 1$, сохраняют один и тот же знак, то для сходимости бесконечного произведения (6) необходимо и достаточно, чтобы сходиллся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (8)$$

Доказательство. Условие $\lim_{k \rightarrow \infty} u_k = 0$ является необходимым как для сходимости ряда (8), так и для сходимости произведения (6). Считаем это условие выполненным и при доказательстве необходимости, и при доказательстве достаточности. Но из этого условия и из асимптотической формулы $\ln(1 + y) = y + o(y)$ при $y \rightarrow 0$ вытекает, что

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln(1 + u_k)}{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k + o(u_k)}{u_k} = \lim_{k \rightarrow \infty} (1 + o(1)) = 1. \quad (9)$$

Поскольку по условию теоремы все члены рядов (7), (8), начиная с некоторого номера k_0 , сохраняют один и тот же знак, то для их сходимости мы можем воспользоваться признаками сравнения.

По второму признаку сравнения (теорема 4) из соотношения (9) следует, что ряд (8) сходится тогда и только тогда, когда сходится ряд (7). *Теорема доказана.*

Пример. Рассмотрим два бесконечных произведения

$$\prod_{k=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{k^{\alpha}}\right), \quad \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{1}{(k+1)^{\alpha}}\right), \quad \alpha \in \mathbb{R}.$$

В §2 был исследован вопрос о сходимости гармонического ряда и обобщенного гармонического ряда. Из этих результатов и из теоремы 19 следует, что при $\alpha > 1$ оба бесконечных произведения сходятся, а при $\alpha \leq 1$ оба произведения расходятся (причем первое к $+\infty$, а второе к нулю).

В качестве иллюстрации приведем примеры разложения в бесконечные произведения функций $\sin x$, $\cos x$ и числа π (*формула Валлиса* *), которые применяются в различных разделах математики.

$$\sin x = x \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x^2}{k^2\pi^2}\right), \quad \cos x = \prod_{k=1}^{\infty} \left(1 - \frac{4x^2}{(2k-1)^2\pi^2}\right),$$
$$\frac{\pi}{2} = \prod_{k=1}^{\infty} \frac{(2k)^2}{(2k-1)(2k+1)}.$$

* Джон Валлис – английский математик (1616 – 1703).

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов

В курсе математического анализа наряду с функциями одной переменной изучались свойства функций двух и большего числа переменных. Это обусловлено необходимостью решения различных прикладных задач. Точно так же мы приходим к необходимости применения последовательностей и рядов, общие члены которых имеют два и большее число индексов. Остановимся на случае рядов с двумя индексами.

Рассмотрим счетное множество числовых послед-тей $(a_{kl})_{k,l=1}^{\infty}$, где k – номер последовательности, а l – номер элемента в послед-ти. Или по другому, рассмотрим матрицу, содержащую бесконечное число строк и бесконечное число столбцов:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1l} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2l} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{k1} & a_{k2} & \dots & a_{kl} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}. \quad (1)$$

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Производя формальное суммирование элементов матрицы (1), можно составить из нее различные ряды.

Если сначала просуммировать каждую строку матрицы (1) отдельно, то получим бесконечную последовательность рядов вида

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2)$$

Просуммировав эту последовательность, получим формальную сумму

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left(\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} \right). \quad (3)$$

Эту сумму называют *повторным рядом*.

Определение. Ряд (3) называется *сходящимся*, если сходится каждый из рядов (2) и если сходится ряд $\sum_{k=1}^{\infty} A_k$, в котором A_k обозначает сумму k -го ряда (2).

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Другой повторный ряд

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{kl} \right) \quad (4)$$

получится, если сначала просуммировать отдельно каждый столбец матрицы (1), а затем взять сумму элементов полученной при этом последовательности. Сходимость ряда (4) определяется аналогично сходимости ряда (3).

С матрицей (1) кроме повторных рядов (3), (4) связывают еще так называемый *двойной ряд*

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}. \quad (5)$$

Определение. *Двойной ряд (5) называется сходящимся, если при независимом стремлении двух индексов m и n к бесконечности существует конечный предел*

$$S = \lim_{m,n \rightarrow \infty} S_{mn}$$

так наз. *прямоугольных частичных сумм*

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n a_{kl}.$$

При этом предел S называется *суммой двойного ряда* (5).

Из этого определения сразу следует, что если двойной ряд (5) получен посредством перемножения двух сходящихся

"одинарных" рядов $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ и $\sum_{l=1}^{\infty} c_l$, т. е. если члены двойного

ряда (5) равны $a_{kl} = b_k c_l$, то этот двойной ряд сходится и его сумма равна произведению сумм этих рядов:

$$S_{mn} = \sum_{k=1}^m \sum_{l=1}^n b_k c_l = \left(\sum_{k=1}^m b_k \right) \left(\sum_{l=1}^n c_l \right) \rightarrow \left(\sum_{k=1}^{\infty} b_k \right) \left(\sum_{l=1}^{\infty} c_l \right) = S$$

при $m, n \rightarrow \infty$.

Утверждение. Необходимым условием сходимости двойного ряда (5) является стремление к нулю его общего члена, т. е.

существование равного нулю предела $\lim_{m,n \rightarrow \infty} a_{mn}$ при

независимом стремлении m и n к бесконечности.

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Доказательство утверждения сразу вытекает из представления общего члена ряда (5) через прямоугольные частичные суммы:

$$a_{mn} = S_{mn} - S_{m(n-1)} - S_{(m-1)n} + S_{(m-1)(n-1)} \rightarrow S - S - (S - S) = 0$$

при $m, n \rightarrow \infty$.

Возникает вопрос, связаны ли между собой сходимость двойного ряда и сходимость повторного ряда.

Теорема 20. *Если сходится двойной ряд (5) и если сходятся все ряды по строкам (2), то сходится и повторный ряд (3), причем к той же сумме, к которой сходится двойной ряд (5).*

Аналогичное утверждение справедливо для ряда (4).

Доказательство. Определим сходимость повторного ряда (3) в терминах последовательности $\{S_{mn}\}$. Так как суммы рядов (2) равны A_k для каждого k , то устремляя в S_{mn} индекс n к бесконечности, получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = \sum_{k=1}^m A_k,$$

обозначим этот предел через φ_m .

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Сумма повторного ряда (3) определяется как предел послед-ти $\{\varphi_m\}$ при $m \rightarrow \infty$, т.е. это есть повторный предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} \right).$$

Итак, нужно доказать существование указанного повторного предела в предположении существования двойного предела прямоугольных частичных сумм S_{mn} и существования предела этих сумм при $n \rightarrow \infty$ при каждом значении m , а также доказать, что эти пределы равны между собой.

По условию двойной ряд (5) сходится. Обозначим его сумму через S . Запишем определение двойного предела равного S :

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0, n_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall m \geq m_0, n \geq n_0 \quad |S_{mn} - S| < \frac{\varepsilon}{2},$$

т. е. для указанных значений m и n

$$S - \frac{\varepsilon}{2} < S_{mn} < S + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Устремляя n к бесконечности, получим, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists m_0 \in \mathbb{N} : \quad \forall m \geq m_0 \quad |\varphi_m - S| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,$$

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

а это означает, что существует предел

$$\lim_{m \rightarrow \infty} \varphi_m = \lim_{m \rightarrow \infty} \lim_{n \rightarrow \infty} S_{mn} = S.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Приведем пример, показывающий, что от условия сходимости всех рядов по строкам (2) в теореме 20 отказаться нельзя (т. е. это условие не вытекает из условия сходимости двойного ряда (5)).

Пример 1. Рассмотрим следующую бесконечную матрицу (a_{kl})

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 & -1 & \dots \\ -1 & 1 & -1 & 1 & \dots \\ \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \dots \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} & \dots \\ \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \frac{1}{3} & -\frac{1}{3} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

Двойной ряд для этой матрицы сходится, его сумма равна нулю, так как прямоугольные частичные суммы S_{mn} в этом случае равны либо нулю, либо a_{mn} – элементу в правом нижнем углу соответств. "прямоугольника"

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

("прямоугольник" состоит из элементов (a_{kl}) , $1 \leq k \leq m$, $1 \leq l \leq n$). А из структуры матрицы следует, что $a_{mn} \rightarrow 0$ при $m, n \rightarrow \infty$. Между тем, все ряды по строкам этой матрицы расходятся, т. е. двойной ряд (5) сходится, а повторный ряд (3) расходится.

Далее, заметим, что все ряды по столбцам этой матрицы сходятся, их суммы равны нулю, следовательно, и повторный ряд (4) сходится и имеет сумму равную нулю.

Замечание 2. В теореме 20 и в примере 1 двойной ряд (5) сходиллся. Связана ли сходимость повторного ряда (3) или (4) со сходимостью двойного ряда (5)? Следующий пример показывает, что повторные ряды (3) и (4) могут сходиться и в случае расходящегося двойного ряда (5).

Пример 2. Рассмотрим следующую бесконечную матрицу (a_{kl})

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & \dots \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}.$$

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Прямоугольные частичные суммы S_{mn} , отвечающие этой матрице, принимают всего два значения – 0 и 1. Причем каждое значение принимается бесконечно много раз, двойного предела не существует, двойной ряд (5) расходится. Между тем, все ряды по строкам сходятся, имеют суммы равные нулю, следовательно и повторный ряд (3) сходится и имеет сумму равную нулю. По столбцам также все ряды сходятся, суммы всех их, кроме первого, равны нулю, а сумма первого ряда равна единице. Следовательно, повторный ряд (4) сходится и имеет сумму равную единице. Таким образом, в этом примере оба повторных ряда, ряды по строкам и ряды по столбцам сходятся, а двойной ряд расходится.

Для "одинарного" ряда с неотрицательными членами в §2 был доказан критерий сходимости (теорема 2). Аналогичный критерий имеет место и для двойных рядов.

Теорема 21. *Если все элементы матрицы (1) неотрицательны, то для сходимости составленного из этой матрицы двойного ряда (5) необходимо и достаточно, чтобы его частичные суммы $\{S_{mn}\}$ были ограничены.*

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Доказательство. Необходимость очевидна: если обозначить через S сумму ряда (5), то $S_{mn} \leq S$ для всех номеров m и n . Для доказательства *достаточности* заметим, что из ограниченности множества частичных сумм $\{S_{mn}\}$ вытекает существование точной верхней грани этого множества, обозначим ее через S : $S = \sup_{1 \leq m, n < \infty} S_{mn}$. По определению

точной верхней грани для любого $\varepsilon > 0$ найдется частичная сумма $S_{m_0 n_0}$ такая, что $S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S$.

Для всех номеров m и n , удовлетворяющих условиям $m \geq m_0, n \geq n_0$, в силу неотрицательности элементов справедливо неравенство $S_{mn} \geq S_{m_0 n_0}$. Следовательно,

$$S - \varepsilon < S_{m_0 n_0} \leq S_{mn} \leq S \quad \forall m \geq m_0, n \geq n_0,$$

это и означает существование двойного предела

$$\lim_{m, n \rightarrow \infty} S_{mn} = S$$

т. е. сходимость двойного ряда (5). *Теорема доказана.*

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Определение. Двойной ряд (5) называется *абсолютно сходящимся*, если сходится двойной ряд

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|, \quad (5')$$

составленный из модулей элементов матрицы (1).

Теорема 22. Если сходится двойной ряд из модулей (5'), то сходится и двойной ряд (5).

Доказательство. Из сходимости ряда (5') следует ограниченность частичных сумм этого ряда (по теореме 21). Положим

$$p_{kl} = \frac{|a_{kl}| + a_{kl}}{2}, \quad q_{kl} = \frac{|a_{kl}| - a_{kl}}{2},$$

тогда из очевидных неравенств $0 \leq p_{kl}, q_{kl} \leq |a_{kl}|$ следует ограниченность частичных сумм каждого из рядов $\sum p_{kl}$, $\sum q_{kl}$. В силу теоремы 21 эти ряды сходятся. Обозначим их суммы соответственно через P и Q . Но тогда из соотношения $a_{kl} = p_{kl} - q_{kl}$ следует, что двойной ряд (5) сходится к сумме $P - Q$. Теорема доказана.

Далее будем рассматривать также и обычный ряд

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \quad (6)$$

членами которого являются занумерованные в произвольном порядке элементы матрицы (1).

Докажем теорему о взаимосвязи между сходимостью четырех рядов, связанных с матрицей (1) – двух повторных, двойного и одинарного.

Для большей наглядности запишем еще раз все рассматриваемые ряды вместе с соответствующими им рядами из модулей.

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \quad k = 1, 2, \dots, \quad (2) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|. \quad (2')$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} a_{kl}, \quad (3) \qquad \sum_{k=1}^{\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}|. \quad (3')$$

$$\sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{kl}, \quad (4) \qquad \sum_{l=1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}|. \quad (4')$$

$$\sum_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}, \quad (5) \qquad \sum_{k,l=1}^{\infty} |a_{kl}|. \quad (5')$$

$$\sum_{r=1}^{\infty} a_r, \quad (6) \qquad \sum_{r=1}^{\infty} |a_r|. \quad (6')$$

Теорема 23. *Рассмотрим четыре ряда (3) – (6). Если сходится хотя бы один из рядов с модулями (3') – (6'), то сходятся все ряды (3) – (6) и суммы их равны между собой.*

Доказательство. Сначала докажем, что из сходимости одного из рядов (3') – (6') вытекает сходимость всех рядов (3) – (6). Поскольку для повторных рядов (3) и (4) рассуждения аналогичны (изменяется только порядок следования индексов), то далее рассматриваем только ряд (3).

§7. Элементарная теория двойных и повторных рядов.

Докажем сходимости рядов по следующей цепочке (стрелочка означает, что из сходимости ряда в левой части следует сходимость ряда в правой части):

$$(3') \rightarrow (6'), (6) \rightarrow (5'), (5) \rightarrow (3'), (3).$$

1) $(3') \rightarrow (6'), (6)$. Пусть сходится повторный ряд $(3')$. Обозначим сумму этого ряда через S' , его частичные суммы через S'_{mn} , а p -ю частичную сумму ряда $(6')$ через S'_p . Для всех номеров m и n справедливо неравенство $S'_{mn} \leq S'$.

Зафиксируем любой номер p . Найдутся столь большие номера m и n , что все члены ряда (6) , входящие в p -ю частичную сумму этого ряда, будут содержаться в первых m строках и в первых n столбцах матрицы (1). Но тогда справедливо неравенство $S'_p \leq S'_{mn} \leq S'$, т. е. $S'_p \leq S'$ (и это верно для любого номера p); все частичные суммы ряда с неотрицательными членами $(6')$ ограничены и по теореме 2 ряд $(6')$ сходится. Из абсолютной сходимости ряда (6) следует его сходимость.

2) $(6') \rightarrow (5')$, (5). Пусть сходится ряд $(6')$. Тогда последовательность его частичных сумм $\{S'_p\}$ является ограниченной: найдется постоянная $M > 0$, что $S'_p \leq M$ для всех номеров.

Зафиксируем любую частичную сумму S'_{mn} ряда $(5')$. Найдется такой большой номер p , что p -я частичная сумма ряда (6) будет содержать все члены, входящие в частичную сумму S'_{mn} ряда (5). Но тогда справедливы неравенства $S'_{mn} \leq S'_p \leq M$, т. е. $S'_{mn} \leq M$ (и это верно для всех номеров m и n). Следовательно, множество $\{S'_{mn}\}$ является ограниченным и ряд $(5')$ сходится (согласно теореме 21). Из теоремы 22, в свою очередь, вытекает сходимость двойного ряда (5).

3) $(5') \rightarrow (3'), (3)$. Пусть сходится двойной ряд $(5')$. Из теоремы 22 следует сходимость ряда (5) . Для доказательства сходимости повторных рядов $(3')$ и (3) в силу теоремы 20 достаточно доказать сходимость каждого из рядов $(2')$ и (2) .

Сходимость ряда (2) при каждом k вытекает из сходимости соответствующего ряда $(2')$. Для сходимости рядов $(2')$ по теореме 2 достаточно доказать, что каждый из этих рядов имеет ограниченную последовательность частичных сумм. Но это очевидно, так как каждая из этих сумм ограничена суммой двойного ряда $(5')$. Из сходимости рядов $(5')$ и $(2')$ следует сходимость ряда $(3')$ (и равенство сумм двойного и повторного рядов), из сходимости рядов (5) и (2) следует сходимость ряда (3) и равенство его суммы сумме ряда (5) .

Докажем, что суммы рядов (5) и (6) также совпадают. Пусть S – сумма двойного ряда (5). Очевидно, что и сумма ряда (6) равна S , так как в силу абсолютной сходимости этого ряда его сумма не меняется при изменении порядка следования его членов и этот порядок можно изменить так, что частичные суммы после изменения порядка будут содержать в качестве подмножества частичные суммы S_{mn} двойного ряда (5).

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы 23 следует, что при условии этой теоремы сходятся все ряды (3') – (6') и имеют равные между собой суммы.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов

Рассмотрим числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k. \quad (1)$$

Мы называли суммой ряда (1) предел S последовательности $\{S_n\}$ его частичных сумм, если этот предел существует. В ряде задач математического анализа, представляющих и теоретический, и практический интерес, приходится оперировать с рядами, у которых последовательность частичных сумм не сходится и суммы в указанном обычном смысле не существует. Возникает вопрос об обобщении понятия суммы ряда и о суммировании расходящегося в обычном смысле ряда (1) с помощью каких-либо обобщенных методов. Остановимся на некоторых методах суммирования расходящихся рядов.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Дадим общую характеристику тех методов суммирования, с которыми будем иметь дело. Разумно требовать, чтобы обобщенное понятие суммы включало в себя обычное понятие суммы. Метод суммирования назовем *регулярным*, если сходящийся числовой ряд (1) имеет и *обобщенную сумму*, причем эта сумма совпадает с обычной суммой этого ряда.

Пусть ряд (1) имеет обобщенную сумму U , а ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} v_k \quad (2)$$

имеет обобщенную сумму V . Метод суммирования назовем *линейным*, если ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k), \quad (3)$$

где α и β произвольные числа, имеет обобщенную сумму $\alpha U + \beta V$.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

1. Метод Чезаро * (или метод средних арифметических). Говорят, что ряд (1) *суммируем методом Чезаро*, если существует предел средних арифметических частичных сумм этого ряда

$$\alpha_n = \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n};$$

этот предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = S \quad (4)$$

называется *обобщенной в смысле Чезаро суммой ряда (1)*.

Линейность метода: обозначим частичные суммы, обобщенную сумму и последовательность средних арифметических частичных сумм ряда (1) через U_k, U, α'_n , те же величины для ряда (2) через V_k, V, α''_n , а через S_k, α_n частичные суммы и последовательность средних арифметических частичных сумм ряда (3). Тогда $\alpha'_n \rightarrow U, \alpha''_n \rightarrow V$ при $n \rightarrow \infty$, а так как $S_k = \alpha U_k + \beta V_k$, то $\alpha_n = \alpha \alpha'_n + \beta \alpha''_n \rightarrow \alpha U + \beta V$ при $n \rightarrow \infty$.

*Эрнесто Чезаро – итальянский математик (1859 – 1906).

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Регулярность метода суммирования Чезаро немедленно следует из доказанной в §2 леммы 1 о сходимости последовательности средних арифметических n чисел, согласно которой из сходимости последовательности $\{S_n\}$ к числу S при $n \rightarrow \infty$ вытекает существование предела (4) и равенство его тому же числу S .

Из упомянутой леммы также следует, что если последовательность $\{S_n\}$ является положительной бесконечно большой, то такой же последовательностью является и $\{\alpha_n\}$. Это означает, что *метод суммирования Чезаро не применим к расходящимся рядам с неотрицательными членами* (так, ряды $\sum \frac{1}{k}$, $\sum 1$, $\sum k$ не суммируются этим методом).

Приведем примеры рядов, не сходящихся в обычном смысле, но суммируемых методом Чезаро.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Пример 1. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots$$

Для каждого n частичные суммы этого ряда равны $S_{2n} = 0$, $S_{2n-1} = 1$, соответственно, средние арифметические частичных сумм последовательно равны $\alpha_n : 1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{1}{2}, \frac{3}{5}, \frac{1}{2}, \dots, \frac{n}{2n-1}, \frac{n}{2n}, \dots$, следовательно, предел (4) существует и равен $\frac{1}{2}$, т. е. ряд суммируем методом Чезаро и его обобщенная сумма S (в смысле Чезаро) равна $\frac{1}{2}$.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Пример 2. Фиксируем произвольное число $x \in (0, 2\pi)$ и рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx = \cos x + \cos 2x + \cos 3x + \dots \quad (5)$$

Выражение для n -ой частичной суммы этого ряда уже получено в конце §5

$$S_n = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Из этого представления, в частности, вытекает расходимость ряда (5). Подсчитаем среднее арифметическое частичных сумм (для вычисления суммы синусов умножаем и делим на $\sin \frac{x}{2}$):

$$\begin{aligned} \alpha_n &= \frac{S_1 + S_2 + \dots + S_n}{n} = \frac{1}{2n \sin \frac{x}{2}} \left[\sum_{l=1}^n \sin(l + \frac{1}{2})x \right] - \frac{1}{2} = \\ &= \frac{1}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} \sum_{l=1}^n [\cos lx - \cos(l+1)x] - \frac{1}{2} = \frac{\cos x - \cos(n+1)x}{4n \sin^2 \frac{x}{2}} - \frac{1}{2} \end{aligned}$$

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Следовательно, $\lim_{n \rightarrow \infty} \alpha_n = -\frac{1}{2}$, т. е. ряд (5) суммируем методом Чезаро и его обобщенная сумма (в смысле Чезаро) равна $-\frac{1}{2}$ для каждого значения $x \in (0, 2\pi)$.

Приведем пример ряда, который не суммируется методом Чезаро, но который можно будет просуммировать методом Пуассона-Абеля, рассмотренным ниже.

Пример 3. Рассмотрим расходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k = 1 - 2 + 3 - 4 + \dots \quad (6)$$

Частичные суммы этого ряда последовательно принимают значения $1, -1, 2, -2, \dots, n, -n, \dots$. Последовательность α_n их средних арифметических расходится, поскольку имеет две предельные точки 0 и $\frac{1}{2}$. Таким образом, ряд (6) не суммируем методом Чезаро.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Этот факт также следует из того, что для ряда (6) $\frac{u_k}{k} = (-1)^{k-1} \not\rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$, где через u_k обозначен общий член ряда (6), и следующего утверждения (задача 1), содержащего *необходимое условие суммируемости ряда (1) методом Чезаро*.

Задача 1. Докажите, что если ряд (1) суммируем методом Чезаро, тогда $u_k = o(k)$, т. е. $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{u_k}{k} = 0$ (сравните это условие с необходимым условием сходимости ряда (1)).

Задача 2. Найдите обобщенную (по Чезаро) сумму ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \sin k.$$

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

2. Метод суммирования Пуассона *-Абеля. Для того чтобы улучшить сходимость ряда (1) умножим общий член ряда на бесконечно малую последовательность, но так, чтобы в пределе вновь получить u_k . Это можно сделать разными способами. Один из способов составляет содержание метода Пуассона-Абеля. Итак, вместо ряда (1) рассмотрим для каждого значения $x \in (0, 1)$ ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots + u_k x^{k-1} + \dots \quad (7)$$

Если этот ряд сходится для каждого x из интервала $(0, 1)$ и если сумма $S(x)$ этого ряда имеет левое предельное значение в точке $x = 1$, т. е. существует предел $\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S$, то

говорят, что ряд (1) *суммируем методом Пуассона-Абеля*. При этом число S называется *суммой ряда (1) в смысле Пуассона-Абеля*.

*Симон Дени Пуассон – французский математик (1781 – 1840).

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Линейность метода Пуассона-Абеля очевидна.

Действительно, обозначим сумму ряда (7) и обобщенную в смысле Пуассона-Абеля сумму ряда (1) соответственно через $U(x)$, U , те же величины для ряда (2) через $V(x)$, V . Тогда для любых чисел $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ справедливо

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha u_k + \beta v_k) x^{k-1} &= \alpha \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} + \beta \sum_{k=1}^{\infty} v_k x^{k-1} = \\ &= \alpha U(x) + \beta V(x) \rightarrow \alpha U + \beta V \end{aligned}$$

при $x \rightarrow 1 - 0$.

Докажем регулярность этого метода. Пусть ряд (1) сходится в обычном смысле и имеет сумму S . Требуется доказать, что ряд (7) сходится для каждого $x \in (0, 1)$ и сумма $S(x)$ ряда (7) имеет в точке $x = 1$ левое предельное значение, равное S .

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Так как ряд (1) сходится, то последовательность его членов является бесконечно малой и, следовательно, ограниченной, т. е. найдется такое число M , что для всех номеров k : $|u_k| \leq M$. Используя это неравенство, оценим модуль k -го члена ряда (7). Получим

$$|u_k x^{k-1}| \leq M x^{k-1}, \quad x \in (0, 1).$$

Так как ряд с общим членом x^{k-1} при $x \in (0, 1)$ сходится, то по первому признаку сравнения (см. теорему 3 и замечание к ней) сходится и ряд (7). Обозначим его сумму через $S(x)$. Обозначим n -ю частичную сумму ряда (1) через S_n , обычную сумму этого ряда через S и через $r_n = S - S_n$ обозначим n -й остаток этого ряда. Для получения удобного для дальнейших преобразований представления суммы $S(x)$ применим доказанное в п. 2 §5 тождество Абеля

$$\sum_{k=n}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_{n-1} v_n.$$

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Положим в этом тождестве $n = 1$, $v_k = x^{k-1}$, $S_0 = 0$ и устремим p к бесконечности. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1}.$$

Вычтем это тождество из следующего очевидного тождества

$$S = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1}.$$

Имеем

$$\begin{aligned} S - \sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} &= (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S x^{k-1} - (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} S_k x^{k-1} = \\ &= (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}, \end{aligned}$$

или

$$S - S(x) = (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} r_k x^{k-1}. \quad (8)$$

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Докажем, что

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0 : \quad |S - S(x)| < \varepsilon \quad \forall x \in (1 - \delta, 1). \quad (9)$$

Так как остаток r_k ряда (1) стремится к нулю при $k \rightarrow \infty$, то

$$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists k_0 \in \mathbb{N}, \quad \forall k \geq k_0 \quad |r_k| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Оценим остаток ряда (8):

$$\begin{aligned} \left| (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} r_k x^{k-1} \right| &< \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=k_0}^{\infty} x^{k-1} < \frac{\varepsilon}{2} (1-x) \sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1} = \\ &= \frac{\varepsilon}{2} \cdot \frac{1-x}{1-x} = \frac{\varepsilon}{2}, \quad \forall x \in (0, 1). \end{aligned}$$

Оценим оставшуюся часть ряда (8). Обозначим через

$$c = \sum_{k=1}^{k_0-1} |r_k| \text{ и рассмотрим } x > 1 - \frac{\varepsilon}{2c}, \quad x < 1. \text{ Тогда}$$

$$\left| (1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} r_k x^{k-1} \right| \leq (1-x) \sum_{k=1}^{k_0-1} |r_k| = c(1-x) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Подставив полученные оценки в (8), устанавливаем справедливость утверждения (9): $\exists \lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = S$. Таким образом, метод суммирования Пуассона-Абеля является регулярным.

Пример. Применим метод суммирования Пуассона-Абеля к уже рассмотренному в предыдущем пункте расходящемуся ряду

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} = 1 - 1 + 1 - 1 + \dots \quad (10)$$

Сумму соответствующего ему ряда (7) найдем как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии:

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^{k-1} = 1 - x + x^2 - x^3 + \dots = \frac{1}{1+x}, \quad \forall x \in (0, 1).$$

Так как существует предел $\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{1+x} = \frac{1}{2}$, то ряд (10) суммируем методом Пуассона-Абеля и его сумма в смысле Пуассона-Абеля равна $\frac{1}{2}$.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Расходящийся ряд (10) мы просуммировали двумя методами и обобщенные суммы его совпали между собой. Этот факт не является случайным: можно доказать, что если ряд суммируем методом Чезаро, то он суммируем и методом Пуассона-Абеля и обобщенные суммы его совпадают. При этом существуют ряды, суммируемые методом Пуассона-Абеля, но не суммируемые методом Чезаро (т. е. метод Пуассона-Абеля является более "сильным" методом, чем метод Чезаро). Ряд (6) является примером такого ряда. Мы показали, что этот ряд не суммируем методом Чезаро. Применим к нему метод Пуассона-Абеля.

§8. Обобщенные методы суммирования расходящихся числовых рядов.

Чтобы найти сумму ряда (7), соответствующего ряду (6),

$$S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k x^{k-1} = 1 - 2x + 3x^2 - 4x^3 + \dots,$$

проинтегрируем этот ряд почленно на отрезке $[0, x]$, $x < 1$ (законность этой операции будет установлена позже, в §6 главы 2). Сумму получаемого при этом ряда мы найдем как сумму бесконечно убывающей геометрической прогрессии. Имеем

$$\begin{aligned} \int_0^x S(t) dt &= \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} k \int_0^x t^{k-1} dt = \sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} x^k = \\ &= x - x^2 + x^3 - x^4 + \dots = \frac{x}{1+x}. \end{aligned}$$

Таким образом, $S(x) = \left(\frac{x}{1+x}\right)' = \frac{1}{(1+x)^2}$, существует предел

$\lim_{x \rightarrow 1-0} S(x) = \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{1}{(1+x)^2} = \frac{1}{4}$, а это означает, что ряд (6)

суммируем методом Пуассона-Абеля и его сумма в смысле Пуассона-Абеля равна $\frac{1}{4}$.

Монография Г. Харди "Расходящиеся ряды" (М.:Наука. 1983).

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Глава 2. Функциональные последовательности и ряды

Для представления различных функций и их приближенного вычисления в математическом анализе широко используются ряды и последовательности, членами которых являются не числа, а функции, определенные на некотором фиксированном множестве. Такие ряды и последовательности, называемые *функциональными*, всесторонне изучаются в настоящей главе.

Фиксируем некоторое множество $\{x\}$ в m -мерном евклидовом пространстве E^m , $m \geq 1$, элементами этого множества являются точки $x = (x_1, x_2, \dots, x_m)$ с координатами $x_1, x_2, \dots, x_m$.

Пусть каждому натуральному числу n ставится в соответствие по определенному закону некоторая функция $f_n(x)$, заданная на множестве $\{x\}$, тогда множество занумерованных функций $f_1(x), f_2(x), \dots, f_n(x), \dots$, будем называть *функциональной последовательностью* и обозначать $\{f_n(x)\}$.

Отдельные функции $f_n(x)$ будем называть *членами* или *элементами* рассматриваемой последовательности, а множество $\{x\}$, на котором определены все функции $f_n(x)$, будем называть *областью определения* этой последовательности. При этом каждая функция $f_n(x)$ является функцией m переменных $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$, где $x_1, x_2, \dots, x_m$ – координаты точки x .

Рассмотрим функциональную последовательность $\{u_n(x)\}$, областью определения которой является некоторое множество $\{x\}$. Формально написанную сумму бесконечного числа членов указанной функциональной последовательности

$$u_1(x) + u_2(x) + \dots + u_n(x) + \dots = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1)$$

будем называть *функциональным рядом*. При этом отдельные функции $u_n(x)$ будем называть *членами* рассматриваемого ряда, а множество $\{x\}$, на котором определены эти функции, будем называть *областью определения* этого ряда.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Как и в случае числового ряда, сумму первых n слагаемых,

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^n u_k(x), \text{ назовем } n\text{-ой частичной суммой ряда (1).}$$

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов

1. Сходимость в точке и на множестве. Предположим, что областью определения функциональной последовательности (функционального ряда) является множество $\{x\}$ пространства E^m . Фиксируем произвольную точку $x_0 \in \{x\}$ и рассмотрим все члены функциональной последовательности (функционального ряда) в этой точке x_0 . При этом получим числовую послед-ть (числовой ряд).

Если указанная числовая послед-ть (числовой ряд) сходится, то говорят, что функциональная послед-ть (функциональный ряд) *сходится в точке x_0* . Множество всех точек x_0 , в которых сходится данная функциональная послед-ть (функциональный ряд), называется *областью сходимости* этой последовательности (ряда).

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Предположим, что функц. послед-сть $\{f_n(x)\}$ имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$. Совокупность пределов, взятых для всех точек множества $\{x\}$ порождает множество всех значений вполне определенной функции $f(x)$, определенной на множестве $\{x\}$. Эту функцию называют *предельной функцией* функц. послед-ти $\{f_n(x)\}$.

Аналогично, если функц. ряд (1) имеет в качестве области сходимости некоторое множество $\{x\}$, то на этом множестве определена функция $S(x)$, являющаяся предельной функцией послед-ти частичных сумм этого ряда и называемая его *суммой*.

Рассмотрим *примеры функциональных послед-тей и рядов*.

Пример 1. В §8 главы 1 при изучении метода Пуассона-Абеля суммирования расходящихся числовых рядов мы исследовали сходимость ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k x^{k-1} = u_1 + u_2 x + u_3 x^2 + \dots + u_k x^{k-1} + \dots$$

для каждого значения $x \in (0, 1)$.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Областью определения этого ряда, очевидно является вся числовая прямая. Рассмотрим теперь этот ряд на интервале $(-1, 1)$. Пусть $\{u_k\}$ – ограниченная числовая послед-ть, тогда этот ряд сходится в каждой точке интервала $(-1, 1)$ (это доказывается так же, как при обосновании регулярности метода суммирования Пуассона-Абеля). Ниже, в §6, мы назовем ряды такого вида степенными рядами и подробно изучим их свойства для произвольных послед-тей коэффициентов $\{u_k\}$.

Пример 2. Рассмотрим послед-ть функций $\{f_n(x)\}$, каждая из которых определена на отрезке $[0, 1]$ и имеет вид

$$f_n(x) = x^n. \quad (2)$$

Областью определения послед-ти (2) является отрезок $[0, 1]$. Отметим, что каждая функция $f_n(x)$ является непрерывной на отрезке $[0, 1]$. Этот же отрезок, очевидно, является и областью сходимости функциональной послед-ти (2). Действительно, $f_n(1) = 1$ для всех номеров n , т. е. в точке $x = 1$ последовательность (2) сходится к единице. В точке $x = 0$ все функции $f_n(0) = 0$, последовательность сходится к нулю.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Если же фиксировать любое число x_0 из интервала $(0, 1)$, то $x_0^n \rightarrow 0$ при $n \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что в любой точке x интервала $(0, 1)$ последовательность (2) сходится к нулю.

Итак, функциональная последовательность (2) сходится на всем отрезке $[0, 1]$ к предельной функции $f(x)$, имеющей вид

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in [0, 1), \\ 1 & \text{при } x = 1. \end{cases}$$

Сразу же отметим, что эта функция *не является непрерывной на отрезке $[0, 1]$* (она имеет разрыв в точке $x = 1$ слева).

Пример 3. Рассмотрим функциональный ряд

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(x+y)^k}{k!} = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \frac{(x+y)^3}{3!} + \dots + \frac{(x+y)^k}{k!} + \dots, \quad (3)$$

областью определения которого является плоскость

$$E^2 = \{(x, y) : x \in (-\infty, \infty), y \in (-\infty, \infty)\}.$$

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Используя разложение по формуле Маклорена функции

$$e^u = 1 + \frac{u}{1!} + \frac{u^2}{2!} + \frac{u^3}{3!} + \dots + \frac{u^n}{n!} + R_{n+1}(u),$$

где $R_{n+1}(u) = \frac{u^{n+1}}{(n+1)!} e^{\theta u}$, $\theta \in (0, 1)$, мы приходим к выводу, что $(n+1)$ -я частичная сумма

$$S_{n+1}(x, y) = 1 + \frac{x+y}{1!} + \frac{(x+y)^2}{2!} + \dots + \frac{(x+y)^n}{n!} \text{ ряда (3)}$$

отличается от функции e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, где $R_{n+1}(u)$ – остаточный член в формуле Маклорена для e^u .

Убедимся теперь в том, что ряд (3) имеет в качестве области сходимости всю бесконечную плоскость E^2 . В самом деле,

$$|R_{n+1}(u)| \leq \frac{|u|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|u|} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty, \quad \forall u \in \mathbb{R},$$

это и означает, что $(n+1)$ -я частичная сумма $S_{n+1}(x, y)$ ряда (3) отличается от функции e^{x+y} на величину $R_{n+1}(x+y)$, стремящуюся к нулю при $n \rightarrow \infty$ в каждой точке (x, y) плоскости E^2 .

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

2. Равномерная сходимость на множестве. Поставим перед собой задачу выяснить, когда некоторые "хорошие свойства" членов функциональных последовательностей (функциональных рядов) переносятся на предельные функции последовательностей (на суммы рядов). Под "хорошими свойствами" мы понимаем одно из следующих свойств: существование предельного значения в точке, интегрируемость на отрезке, непрерывность на множестве, дифференцируемость на отрезке, наличие первообразных функций на отрезке.

Пример 2 показывает, что "обычная" поточечная сходимость функциональной последовательности на множестве не гарантирует перенесение свойства непрерывности членов последовательности на предельную функцию этой послед-ти.

Определим еще один вид сходимости функциональных последовательностей и рядов. Сформулируем сначала определение сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ на множестве $\{x\}$ следующим образом:

$$\forall x \in \{x\}, \quad \forall \varepsilon > 0 \quad \exists N \in \mathbb{N} : \quad \forall n \geq N \quad |f_n(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

В этом определении номер $N = N(\varepsilon, x)$ зависит и от параметра ε , и от точки x . То есть сходимость или скорость приближения $f_n(x)$ к предельному значению в каждой точке может быть разной. Потребуем, чтобы номер N в определении сходимости не зависел от точки x , такую сходимость назовем равномерной на множестве (или одинаковой во всех точках множества).

Предположим, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на множестве $\{x\}$ пространства E^m к предельной функции $f(x)$.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер $N(\varepsilon)$ такой, что для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N(\varepsilon)$, и для всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon. \quad (4)$$

Замечание 1. В этом определении весьма существенно то, что номер N зависит только от ε и не зависит от точек x .

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

т. е. утверждается, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется универсальный номер $N(\varepsilon)$, начиная с которого неравенство (4) справедливо *сразу для всех точек x множества $\{x\}$* .

Замечание 2. Сформулируем критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей, вытекающий из определения 1. Для того чтобы последовательность $\{f_n(x)\}$ сходилась к функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$, необходимо и достаточно, чтобы существовал равный нулю следующий предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\{x\}} |f_n(x) - f(x)| \right] = 0. \quad (5)$$

Замечание 3. Из определения 1 непосредственно следует, что если последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ на всем множестве $\{x\}$, то $\{f_n(x)\}$ равномерно сходится к $f(x)$ и на любом подмножестве множества $\{x\}$.

Замечание 4. Из сходимости функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$ не вытекает, вообще говоря, равномерная сходимость $\{f_n(x)\}$ на этом множестве. Покажем это на примере.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Обратимся к последовательности (2) из примера 2. Было показано, что эта последовательность сходится на всем отрезке $[0, 1]$ к разрывной функции $f(x)$. Докажем, что эта последовательность *не сходится равномерно на $[0, 1]$* .

Воспользуемся критерием равномерной сходимости (5).
Имеем

$$\begin{aligned}\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\{x\}} |f_n(x) - f(x)| \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{[0,1]} |x^n - f(x)| \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{[0,1)} x^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} 1 = 1 \neq 0.\end{aligned}$$

Таким образом, последовательность $\{x^n\}$ не сходится равномерно на $[0, 1]$.

Покажем, как непосредственно из определения 1 можно вывести утверждение о том, что последовательность $\{x^n\}$ не сходится равномерно на $[0, 1]$. Требуется доказать, что

$$\exists \varepsilon > 0 : \quad \forall N \in \mathbb{N}, \quad \exists n \geq N, \quad \exists x_0 \in [0, 1], \quad |f_n(x_0) - f(x_0)| \geq \varepsilon.$$

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Рассмотрим последовательность точек $x_n = \sqrt[n]{\frac{1}{2}}$ ($n = 1, 2, \dots$), принадлежащих отрезку $[0, 1]$. В каждой из этих точек (т. е. для каждого номера n) справедливы соотношения

$$f_n(x_n) = \left[\sqrt[n]{\frac{1}{2}} \right]^n = \frac{1}{2}, \quad f(x_n) = 0.$$

Таким образом, для любого номера n

$$|f_n(x_n) - f(x_n)| = \frac{1}{2};$$

следовательно, при $\varepsilon \leq \frac{1}{2}$ неравенство (4) не может выполняться сразу для всех точек x отрезка $[0, 1]$ ни при одном номере n . Это и означает отсутствие равномерной на отрезке $[0, 1]$ сходимости рассматриваемой последовательности.

Отметим, что рассматриваемая последовательность (2) сходится к предельной функции $f(x)$ *равномерно на каждом отрезке* $[0, 1 - \delta]$, где δ – любое фиксированное число из интервала $(0, 1)$.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

В самом деле, для любого выбранного δ предельная функция $f(x)$ равна нулю на отрезке $[0, 1 - \delta]$. Поэтому, воспользовавшись критерием равномерной сходимости (5), получим

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{\{x\}} |f_n(x) - f(x)| \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\sup_{[0, 1 - \delta]} x^n \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} (1 - \delta)^n = 0,$$

то есть последовательность $\{x^n\}$ сходится равномерно на отрезке $[0, 1 - \delta]$.

Определение 2. Функциональный ряд (1) называется *равномерно сходящимся* на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$, если последовательность $\{S_n(x)\}$ его частичных сумм сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $S(x)$.

Пример. Зафиксируем произвольное положительное число r . Покажем, что функциональный ряд (3) из примера 3 сходится к сумме e^{x+y} равномерно в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Действительно, всюду в этом круге $|x| \leq r$, $|y| \leq r$, и потому $|x + y| \leq |x| + |y| \leq 2r$, откуда, используя выражение для остаточного члена $R_{n+1}(u)$, выписанное в примере 3, получаем, что всюду в указанном круге

$$|R_{n+1}(x+y)| = |S_{n+1}(x, y) - e^{x+y}| \leq \frac{|x+y|^{n+1}}{(n+1)!} e^{|x+y|} \leq \frac{(2r)^{n+1}}{(n+1)!} e^{2r}.$$

Из последнего неравенства вытекает, что $R_{n+1}(x+y)$ стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$ равномерно в круге $x^2 + y^2 \leq r^2$, а это и означает, что ряд (3) сходится равномерно в этом круге к сумме e^{x+y} .

3. Критерий Коши равномерной сходимости последовательности (ряда).

Справедливы следующие фундаментальные теоремы.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 1. Для того чтобы функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равномерно на множестве $\{x\}$ сходилась к некоторой предельной функции, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N , гарантирующий справедливость неравенства

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon \quad (6)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных чисел p и всех точек x из множества $\{x\}$.

Теорема 2. Для того чтобы функциональный ряд (1) равномерно на множестве $\{x\}$ сходил к некоторой сумме, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашелся номер N , гарантирующий справедливость неравенства

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) \right| < \varepsilon \quad (7)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных чисел p и всех точек x из множества $\{x\}$.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Достаточно провести доказательство только теоремы 1, так как теорема 2 является следствием теоремы 1 (заметим, что в левой части (7) под знаком модуля стоит разность $S_{n+p}(x) - S_n(x)$ частичных сумм с номерами $n + p$ и n функционального ряда (1)).

Доказательство теоремы 1. Необходимость. Предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$. Тогда, фиксируя произвольное $\varepsilon > 0$, мы найдем для него номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что неравенство

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (8)$$

будет справедливо для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, и для всех точек x множества $\{x\}$.

Если p – любое натуральное число, то при $n \geq N$ номер $n + p$ тем более будет удовлетворять условию $n + p \geq N$, а поэтому для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ тем более будет справедливо неравенство

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

$$|f_{n+p}(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

Так как модуль суммы двух величин не превосходит суммы их модулей, то в силу (8) и (9) получим, что

$$\begin{aligned} |f_{n+p}(x) - f_n(x)| &= |[f_{n+p}(x) - f(x)] + [f(x) - f_n(x)]| \leq \\ &\leq |f_{n+p}(x) - f(x)| + |f(x) - f_n(x)| < \varepsilon \end{aligned}$$

(для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$). *Необходимость доказана.*

Достаточность. Предположим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ существует номер $N = N(\varepsilon)$ такой, что неравенство (6) справедливо для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$.

Из неравенства (6) и из критерия Коши сходимости *числовой* последовательности вытекает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ в каждой точке x множества $\{x\}$ и существование определенной в каждой точке x множества $\{x\}$ предельной функции $f(x)$.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Зафиксировав произвольный номер n , удовлетворяющий условию $n \geq N$, и произвольную точку x множества $\{x\}$, перейдем в неравенстве (6) к пределу при $p \rightarrow \infty$. Мы получим, что для произвольного номера n , удовлетворяющего условию $n \geq N$, и произвольной точки x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f(x) - f_n(x)| \leq \varepsilon < 2\varepsilon.$$

Это и доказывает, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на множестве $\{x\}$.

Теорема доказана.

Из доказанной теоремы 2 можно в качестве следствия получить следующее *необходимое условие равномерной сходимости функционального ряда*.

§1. Различные виды сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Следствие из теоремы 2. Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то функциональная последовательность $\{u_k(x)\}$ сходится к нулю равномерно на этом множестве.

(Для доказательства этого утверждения достаточно положить в соотношении (7) $p = 1$.)

Наличие критерия Коши не снимает вопроса об установлении удобных для приложений достаточных признаков равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов

1. Признак Вейерштрасса[†]. В начале главы 2 мы убедились в том, что изучение функциональных рядов эквивалентно изучению функциональных последовательностей. С этой точки зрения каждый признак равномерной сходимости имеет две эквивалентные формулировки: одну в терминах функциональных рядов, а другую в терминах функциональных последовательностей. В зависимости от удобства мы будем формулировать устанавливаемые признаки либо в терминах последовательностей, либо в терминах рядов (а иногда будем приводить обе эквивалентные формулировки).

[†]Карл Вейерштрасс – немецкий математик (1815 – 1897).

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §2.

Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Теорема 3 (признак Вейерштрасса). Пусть функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1)$$

определен на множестве $\{x\}$ пространства E^m . Если существует сходящийся числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \quad (2)$$

такой, что для всех точек x множества $\{x\}$ и для всех номеров k справедливо неравенство

$$|u_k(x)| \leq c_k, \quad (3)$$

то функциональный ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Доказательство. Фиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как числовой ряд (2) сходится, то в силу критерия Коши сходимости числового ряда (см. теорему 1 из гл. 1) найдется номер N такой, что

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon \quad (4)$$

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, и всех натуральных p .

Из неравенств (3), (4) и из того, что модуль суммы p слагаемых не превосходит сумму их модулей, получаем

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k \right| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} |u_k| \leq \sum_{k=n+1}^{n+p} c_k < \varepsilon$$

(для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$). В силу критерия Коши равномерной сходимости (см. теорему 2) ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$. *Теорема доказана.*

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Замечание 1. Признак Вейерштрасса кратко может быть сформулирован так: *функциональный ряд сходится равномерно на данном множестве, если его можно мажорировать на этом множестве сходящимся числовым рядом.*

Замечание 2. Признак Вейерштрасса является достаточным, но не необходимым признаком равномерной сходимости функционального ряда. В самом деле, функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k}$$

сходится равномерно на отрезке $0 \leq x \leq 1$ к сумме $\ln(1+x)$, поскольку разность между $\ln(1+x)$ и n -ой частичной суммой этого ряда, равная остаточному члену $R_{n+1}(x)$ в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$, для всех x из отрезка $[0, 1]$ удовлетворяет неравенству

$$|R_{n+1}(x)| \leq \frac{1}{n+1}.$$

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Однако для данного функционального ряда не существует на отрезке $[0, 1]$ мажорирующего его сходящегося числового ряда, так как для каждого номера k

$$\sup_{x \in [0,1]} \left| \frac{(-1)^{k-1} x^k}{k} \right| = \frac{1}{k},$$

а числовой ряд $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k}$ расходится.

Пример. Применим признак Вейерштрасса для установления равномерной сходимости в пространстве E^3 функц. ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kx^3 - k^2y + 10z)}{k^{1,001}}.$$

Можно утверждать, что этот ряд сходится равномерно во всем трехмерном евклидовом пространстве E^3 , так как для любой точки (x, y, z) этого пространства он может быть мажорирован

сходящимся числовым рядом $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{1,001}}$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

2. Функциональные последовательности с равномерно ограниченным изменением. Чтобы сформулировать еще два признака равномерной сходимости функциональных рядов, введем некоторые новые понятия.

Определение 1. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равномерно ограниченной* на множестве $\{x\}$, если существует такое вещественное число $M > 0$, что для всех номеров n и всех точек x множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|f_n(x)| \leq M.$$

Вопрос. Из теории числовых последовательностей мы знаем, что сходящаяся числовая последовательность является ограниченной. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$. Следует ли из этого, что последовательность $\{f_n(x)\}$ является *равномерно ограниченной* на этом множестве?

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Определение 2. Функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *монотонной на множестве $\{x\}$* , если для каждой точки x_0 из множества $\{x\}$ числовая последовательность $\{f_n(x_0)\}$ является невозрастающей или для каждой точки x_0 из множества $\{x\}$ последовательность $\{f_n(x_0)\}$ является неубывающей.

Замечание. Для монотонной на множестве $\{x\}$ последовательности $\{f_n(x)\}$ каждая функция $f_n(x)$ этой последовательности *не обязана быть монотонной на этом множестве*. Например, последовательность $\{\frac{\sin x}{n}\}$ является монотонной на множестве $[0, \pi]$, при этом каждая функция этой последовательности $f_n(x) = \frac{\sin x}{n}$ не является монотонной на $[0, \pi]$. Заметим, что, например, на множестве $[0, 2\pi]$ последовательность $\{\frac{\sin x}{n}\}$ уже не является монотонной.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Определение 3. Функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ называется последовательностью, обладающей на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \quad (5)$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Замечание. Из последнего определения не следует, что если последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет на множестве $\{x\}$ равн. огранич. изменение, то она равномерно ограничена на этом множестве. Напр., функц. послед-ть с общим членом $v_n(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{n}$, $x \in (0, 1]$, $v_n(0) = 0$ имеет равномерно ограниченное изменение на отрезке $[0, 1]$ (частичные суммы ряда (5) представляются в виде $S_n(x) = 1 - \frac{1}{n+1}$ для каждого $x \in (0, 1]$), но эта последовательность не является равномерно ограниченной на отрезке $[0, 1]$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Сформулируем *необходимое условие* для функциональной последовательности с равномерно ограниченным на некотором множестве изменением.

Утверждение 1. *Если последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченное изменение, то она равномерно сходится на этом множестве.*

Доказательство. Из равномерной сходимости ряда (5) на множестве $\{x\}$ и критерия Коши равномерной сходимости (теорема 2) следует равномерная на множестве $\{x\}$ сходимость ряда без модулей

$$\sum_{k=1}^{\infty} (v_{k+1}(x) - v_k(x)). \quad (6)$$

Последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ряда (6), тем самым, сходится равномерно на множестве $\{x\}$. А так как общий член последовательности $\{v_n(x)\}$ можно представить в виде $v_n(x) = S_{n-1}(x) + v_1(x)$, то последовательность $\{v_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$. *Утверждение доказано.*

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Сформулируем теперь *достаточное условие* для того чтобы функциональная последовательность имела на некотором множестве равномерно ограниченное изменение.

Утверждение 2. *Всякая монотонная равномерно сходящаяся на множестве $\{x\}$ функциональная последовательность является последовательностью с равномерно ограниченным на этом множестве изменением.*

Доказательство. По условию теоремы последовательность $\{v_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к некоторой функции $v(x)$. Из монотонности последовательности $\{v_n(x)\}$ на множестве $\{x\}$ следует, что для каждого номера n разность $v_{n+1}(x) - v_n(x)$ неотрицательна во всех точках x множества $\{x\}$ (или для каждого номера n эта разность неположительна во всех точках x множества $\{x\}$). Но тогда для частичных сумм ряда (5) получим следующее представление:

$$\begin{aligned} S_n(x) &= \sum_{k=1}^n |v_{k+1}(x) - v_k(x)| = \left| \sum_{k=1}^n (v_{k+1}(x) - v_k(x)) \right| = \\ &= |v_{n+1}(x) - v_1(x)|, \end{aligned}$$

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

из чего заключаем, что последовательность $\{S_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к функции $|v(x) - v_1(x)|$. Следовательно, ряд (5) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ и последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет равномерно ограниченное на этом множестве изменение. *Утверждение доказано.*

3. Два признака Абеля. Рассмотрим на некотором множестве $\{x\}$ функциональный ряд вида

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)v_k(x). \quad (7)$$

Докажем для этого ряда два признака равномерной сходимости. Обозначим через $\{S_n(x)\}$ послед-ть частичных сумм ряда (1).

Теорема 4 (два признака Абеля). *1. Пусть послед-ть $\{S_n(x)\}$ равномерно ограничена на множестве $\{x\}$, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ является бесконечно малой последовательностью с равномерно ограниченным на множестве $\{x\}$ изменением. Тогда ряд (7) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

II. Пусть функциональный ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ имеет равномерно ограниченное на множестве $\{x\}$ изменение и равномерно ограничена на этом множестве. Тогда ряд (7) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

Доказательство. I. По условию существует число $M > 0$ такое, что последовательность $\{S_n(x)\}$ частичных сумм ряда (1) для всех номеров n и всех точек x из множества $\{x\}$ удовлетворяет неравенству $|S_n(x)| \leq M$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$ и по нему номер N такой, что для всех n , превосходящих N , всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$ справедливы неравенства

$$|v_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}, \quad (8)$$

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (9)$$

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

(Мы воспользовались равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью последовательности $\{v_n(x)\}$ к нулю и равномерной на множестве $\{x\}$ сходимостью ряда (5).)

В силу тождества Абеля (см. п.2 §5 гл. 1)

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k (v_k - v_{k+1}) + S_{n+p} v_{n+p} - S_n v_{n+1}, \quad p \neq 1, \quad (10)$$

(в случае $p = 1$ в правой части (10) первую сумму следует заменить нулем) и в силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит сумму их модулей, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x) v_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} S_k(x) (v_k(x) - v_{k+1}(x)) \right| + |S_{n+p}(x)| |v_{n+p}(x)| + |S_n(x)| |v_{n+1}(x)|.$$

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Учитывая, что для всех номеров n и всех точек x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство $|S_n(x)| \leq M$, получим

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| \leq M \sum_{k=n+1}^{n+p} |v_k(x) - v_{k+1}(x)| + M|v_{n+p}(x)| + M|v_{n+1}(x)|.$$

Полагая $n > N$, из последнего неравенства и оценок (8), (9) получим неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| < M \left(\frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} + \frac{\varepsilon}{3M} \right) = \varepsilon,$$

справедливое для всех номеров n , превосходящих N , всех натуральных p и всех точек x из множества $\{x\}$, а это и означает, что ряд (7) сходится равномерно на множестве $\{x\}$ (в силу теоремы 2).

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

II. Так как функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ является равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$, то существует число $M > 0$ такое, что для всех номеров n и всех x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$|v_n(x)| \leq M. \quad (11)$$

При условиях второго признака Абеля последовательность частичных сумм $\{S_n(x)\}$ ряда (1) может не быть равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$. Поэтому рассмотрим модифицированные суммы

$$\hat{S}_n(x) = \sum_{k=N}^n u_k(x), \quad n \geq N,$$

где номер N выбираем следующим образом. Зафиксируем произвольное число $\varepsilon > 0$. Ряд (1) по условию теоремы сходится равномерно на множестве $\{x\}$, поэтому, согласно теореме 2, найдется номер N такой, что для всех номеров $n \geq N$ и всех точек x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

$$|\hat{S}_n(x)| < \frac{\varepsilon}{3M}. \quad (12)$$

Зафиксируем номер N . В силу критерия Коши равномерной на множестве $\{x\}$ сходимости функционального ряда (5) для числа $M > 0$ найдется номер $N_1 > N$, такой, что при всех x из множества $\{x\}$, для всех $n \geq N_1$ и для любого $p = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} |v_{k+1}(x) - v_k(x)| \leq M. \quad (13)$$

Поскольку для всех номеров $n > N$ справедливо представление $u_n(x) = \hat{S}_n(x) - \hat{S}_{n-1}(x)$, то обоснование тождества Абеля (10) после замены S_n на $\hat{S}_n$ не изменится. Запишем

$$\sum_{k=n+1}^{n+p} u_k v_k = \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \hat{S}_k(v_k - v_{k+1}) + \hat{S}_{n+p} v_{n+p} - \hat{S}_n v_{n+1}$$

(в случае $p = 1$ в правой части первая сумма — нуль).

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

В силу этого тождества для всех номеров n и p и всех x из множества $\{x\}$ справедливо неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| \leq \left| \sum_{k=n+1}^{n+p-1} \widehat{S}_k(x)(v_k(x) - v_{k+1}(x)) \right| + \quad (14) \\ + |\widehat{S}_{n+p}(x)||v_{n+p}(x)| + |\widehat{S}_n(x)||v_{n+1}(x)|.$$

Используя в правой части (14) неравенства (11), (12) и (13), мы для всех $n \geq N_1$, всех $p = 1, 2, \dots$ и всех x из множества $\{x\}$ получим неравенство

$$\left| \sum_{k=n+1}^{n+p} u_k(x)v_k(x) \right| < \varepsilon,$$

которое в силу критерия Коши доказывает равномерную на множестве $\{x\}$ сходимость функционального ряда (7). *Теорема доказана.*

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Из первого признака Абеля можно вывести полезное для приложений следствие. Рассмотрим ряд (7).

Теорема 5 (признак Дирихле-Абеля). *Если функциональный ряд (1) обладает равномерно ограниченной на множестве $\{x\}$ последовательностью частичных сумм, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна на множестве $\{x\}$ и равномерно на этом множестве сходится к нулю, то функциональный ряд (7) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.*

Доказательство. Достаточно заметить, что из приведенного в п. 2 утверждения 2 следует, что последовательность $\{v_n(x)\}$ обладает на множестве $\{x\}$ равномерно ограниченным изменением, поэтому выполняются все условия теоремы 4 (I) - первого признака Абеля. *Теорема доказана.*

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Задача. Докажите следующее утверждение (третий признак Абеля). Рассмотрим ряд (7). Если функциональный ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, а функциональная последовательность $\{v_n(x)\}$ монотонна на множестве $\{x\}$ и равномерно ограничена на этом множестве, то функциональный ряд (7) сходится равномерно на множестве $\{x\}$.

(Указание. Следует воспользоваться схемой доказательства второго признака Абеля, немного видоизменив ее.)

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пример 1. Изучим вопрос о равномерной сходимости функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k + (1 + |x|)^k}. \quad (15)$$

Так как последовательность

$$v_n(x) = \frac{1}{n + (1 + |x|)^n}$$

не возрастает в каждой точке бесконечной прямой $-\infty < x < \infty$ и равномерно на этой прямой сходится к нулю, то в силу признака Дирихле-Абеля ряд (15) сходится равномерно на любом множестве, на котором ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \cos kx \quad (16)$$

обладает равномерно ограниченной последовательностью частичных сумм.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Для n -ой частичной суммы $S_n(x)$ ряда (16) в п.3 §5 гл. 1 было получено следующее представление (для любого значения x не кратного 2π)

$$S_n(x) = \frac{\sin(n + \frac{1}{2})x - \sin \frac{x}{2}}{2 \sin \frac{x}{2}}.$$

Таким образом, для любого x , не кратного 2π , и любого номера n справедливо неравенство

$$|S_n(x)| \leq \frac{1}{|\sin \frac{x}{2}|},$$

которое означает, что последовательность частичных сумм ряда (16) равномерно ограничена на любом фиксированном отрезке, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, где $m = 0, \pm 1, \dots$ (так как на любом таком отрезке функция $|\sin \frac{x}{2}|$ имеет положительную точную нижнюю грань).

Итак, ряд (15) сходится равномерно на любом фиксированном отрезке, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пример 2. В силу второго признака Абеля можно утверждать, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{\cos kx}{k + (1 + |x|)^k} \right] \frac{k + 1 + |x|}{k + |x|} \right\}$$

сходится равномерно на любом отрезке, не содержащем точек $x_m = 2\pi m$, $m = 0, \pm 1, \dots$, поскольку ряд (15) равномерно сходится на таком отрезке, а последовательность $v_k = \frac{k+1+|x|}{k+|x|}$ обладает равномерно ограниченным на любом отрезке изменением (согласно утверждению 2 из п. 2) и является равномерно ограниченной на всей числовой прямой.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §2.

Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

4. Признак Дини *. Сформулируем признак равномерной сходимости функциональных последовательностей, существенно использующий свойства входящих в них функций.

Теорема 6 (признак Дини). Пусть последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ на некотором множестве $\{x\}$ пространства E^m и пусть выполняются следующие четыре условия: 1) множество $\{x\}$ – компакт (т. е. ограниченное замкнутое множество); 2) последовательность $\{f_n(x)\}$ является монотонной на множестве $\{x\}$; 3) для каждого номера n функция $f_n(x)$ является непрерывной на множестве $\{x\}$; 4) функция $f(x)$ является непрерывной на множестве $\{x\}$. Тогда сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ является равномерной на множестве $\{x\}$.

Доказательство. Не ограничивая общности предположим, что последовательность $\{f_n(x)\}$ не убывает на замкнутом ограниченном множестве $\{x\}$

* Улисс Дини – итальянский математик (1845 – 1918).

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §2.

Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

(случай невозрастающей последовательности сводится к этому случаю умножением всех элементов последовательности на число (-1)). Положим $r_n(x) = f(x) - f_n(x)$. Послед-ть $\{r_n(x)\}$ обладает следующими свойствами:

- 1) все $r_n(x)$ неотрицательны и непрерывны на множестве $\{x\}$;
- 2) $\{r_n(x)\}$ не возрастает на множестве $\{x\}$;
- 3) в каждой точке x множества $\{x\}$ существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} r_n(x) = 0.$$

Достаточно доказать, что последовательность $\{r_n(x)\}$ сходится к тождественному нулю равномерно на множестве $\{x\}$, т. е. что для любого $\varepsilon > 0$ найдется *хотя бы один номер* n такой, что $r_n(x) < \varepsilon$ для всех x из множества $\{x\}$. (Тогда в силу невозрастания последовательности $\{r_n(x)\}$ неравенство $r_n(x) < \varepsilon$ будет справедливо и для всех последующих номеров.)

Допустим, что для некоторого $\varepsilon > 0$ не найдется ни одного номера n такого, что $r_n(x) < \varepsilon$ сразу для всех x из множества $\{x\}$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Тогда для любого номера n найдется хотя бы одна точка x_n множества $\{x\}$ такая, что

$$r_n(x_n) \geq \varepsilon. \quad (17)$$

В силу ограниченности множества $\{x\}$ и теоремы Больцано-Вейерштрасса из последовательности точек $\{x_n\}$ можно выделить подпоследовательность точек $\{x_{n_k}\}$, сходящуюся к некоторой точке x_0 , принадлежащей в силу замкнутости множества $\{x\}$ этому множеству. Так как каждая функция $r_m(x)$ (с любым номером m) является непрерывной в точке x_0 , то для любого номера m

$$\lim_{k \rightarrow \infty} r_m(x_{n_k}) = r_m(x_0). \quad (18)$$

С другой стороны, выбрав для каждого номера m превосходящий его номер n_k , получим (в силу невозрастания последовательности $\{r_n(x)\}$)

$$r_m(x_{n_k}) \geq r_{n_k}(x_{n_k}).$$

Сопоставление последнего неравенства с неравенством (17), справедливым для любого номера n , дает оценку

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

$$r_m(x_{n_k}) \geq \varepsilon \quad (19)$$

(для любого номера n_k , превосходящего фиксированный нами произвольный номер m).

Из (18), (19) вытекает, что $r_m(x_0) \geq \varepsilon$ (для любого m), а это противоречит сходимости послед-ти $\{r_m(x)\}$ в точке x_0 к нулю. Полученное противоречие *доказывает теорему*.

Замечание. Признак Дини является достаточным. Существуют функц. послед-ти, сходящиеся равномерно на некомпактных множествах, либо содержащие разрывные функции, но сходящиеся равномерно и пр. Но в теореме 6 существенны все четыре условия. Приведем четыре примера, в каждом из которых нарушено одно из четырех условий теоремы, остальные три условия выполняются и равномерная сходимость отсутствует. Во всех четырех случаях для доказательства нарушения равномерной сходимости используем критерий равномерной сходимости функциональных последовательностей, сформулированный в замечании 2 §1.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пример 1. Рассмотрим невозрастающую функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$ на некомпактном множестве $0 \leq x < 1$. Предельная функция $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1)$, сходимость неравномерная, так как $\sup_{x \in [0, 1)} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Пример 2. Рассмотрим немонотонную функц. послед-ть

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Предельная функция $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, сходимость неравномерная, так как $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Пример 3. Рассмотрим невозрастающую функц. послед-ть, состоящую из разрывных (в т. $x = 1$) функций

$$f_n(x) = \begin{cases} x^n, & x \in [0, 1), \\ 0, & x = 1. \end{cases}$$

Предельная ф-я $f(x) \equiv 0$, $x \in [0, 1]$, сходимость неравномерная, так как $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

Пример 4. Рассмотрим невозрастающую функциональную последовательность $f_n(x) = x^n$ на отрезке $0 \leq x \leq 1$. Предельная функция является разрывной (в точке $x = 1$)

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0, 1), \\ 1, & x = 1, \end{cases}$$

сходимость неравномерная, так как $\sup_{x \in [0, 1]} |f_n(x) - f(x)| = 1$.

Приведем эквивалентную формулировку теоремы Дини в терминах функциональных рядов

Теорема 6*. Пусть функциональный ряд (1) сходится к сумме $S(x)$ на некотором множестве $\{x\}$ пространства E^m и пусть выполняются следующие четыре условия: 1) множество $\{x\}$ – компакт; 2) члены ряда $u_k(x)$, $k = 1, 2, \dots$, неотрицательны на множестве $\{x\}$; 3) для каждого номера k функция $u_k(x)$ является непрерывной на множестве $\{x\}$; 4) функция $S(x)$ является непрерывной на множестве $\{x\}$. Тогда сходимость ряда (1) является равномерной на множестве $\{x\}$.

§2. Признаки равномерной сходимости функциональных последовательностей и рядов.

В качестве *примеров* применения признака Дини изучим вопрос о характере сходимости

1) последовательности $\{(x^2 + y^2)^n\}$ в круге радиуса $\frac{1}{2}$ с центром в точке $(0, 0)$: сходимость является равномерной в этом круге, так как рассматриваемая последовательность сходится в каждой точке этого круга к предельной функции $f(x, y) \equiv 0$, не возрастает в каждой точке круга и состоит из функций, непрерывных в нем;

2) последовательности $\{x^n\}$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$: сходимость является равномерной на этом отрезке, так как рассматриваемая последовательность сходится в каждой точке этого отрезка к предельной функции $f(x) \equiv 0$, не возрастает в каждой точке отрезка и состоит из функций, непр. на нем;

3) ряда $\sum_{k=1}^{\infty} x^{k-1}$ на отрезке $[0, \frac{1}{2}]$: сходимость является равномерной на этом отрезке, так как рассматриваемый ряд сходится в каждой точке этого множества, сумма его $S(x) = \frac{1}{1-x}$ является непрерывной на отрезке, а все члены ряда неотрицательны и непрерывны на этом отрезке.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности

В этом параграфе мы изучим следующий важный вопрос. Когда каждое из следующих функциональных свойств: возможность предельного перехода в точке, непрерывность на множестве, интегрируемость, дифференцируемость и существование первообразной на отрезке, справедливое для членов функционального ряда (функциональной послед-ти), будет справедливо и для суммы ряда (предельной функции послед-ти).

То что автоматически свойства членов ряда или послед-ти не переносятся на сумму ряда или предельную функцию последовательности следует из примеров 3, 4, приведенных в конце §2.

Действительно, послед-ть, состоящая из разрывных функций (пример 3) может сходиться к непрерывной функции на отрезке, а послед-ть, состоящая из непрерывных на отрезке функций может сходиться к разрывной функции (пример 4).

Приведем еще один пример, показывающий полезность выяснения сформулированного выше вопроса.

Пример. Требуется найти предел в точке $x = 1$ слева ($x \rightarrow 1 - 0$) суммы функционального ряда

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{1+x^k}.$$

Можно было бы попытаться найти сумму рассматриваемого ряда и посчитать предел, но это громоздко. Поступим по-другому. Выполним требуемую операцию "почленно": посчитаем предел каждого члена ряда и просуммируем полученные числа. Получим

$$\sum_{k=1}^{\infty} \left[\frac{(-1)^{k-1}}{k} \lim_{x \rightarrow 1-0} \frac{x^k}{1+x^k} \right] = \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} = \frac{1}{2} \ln 2 = \ln \sqrt{2}$$

(сумма последн. ряда найдена в п. 1 §3 гл. 2). Верно ли, что

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k-1}}{k} \frac{x^k}{1+x^k} \right] = \ln \sqrt{2}?$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Мы сможем ответить на этот вопрос после доказательства следующей теоремы 7 (см. замечание 3 п.1).

1. Почленный переход к пределу. Непрерывность.

Рассмотрим произвольную точку a пространства E^m и произвольное множество $\{x\}$ пространства E^m , для которого эта точка является предельной (при этом точка a может сама не принадлежать множеству $\{x\}$).

Теорема 7. Если функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (1)$$

сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к сумме $S(x)$ и у всех членов этого ряда существует в точке a предел $\lim_{x \rightarrow a} u_k(x) = b_k$, то и сумма ряда $S(x)$ имеет в точке a предел, причем

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left[\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} \left[\lim_{x \rightarrow a} u_k(x) \right] = \sum_{k=1}^{\infty} b_k, \quad (2)$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

т. е. символ $\lim$ предела и символ $\sum$ суммирования можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу можно переходить почленно).

Замечание 1. Соотношения (2) можно записать и в следующем виде:

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} S_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} S_n(x) \right),$$

где $\{S_n(x)\}$ – последовательность частичных сумм ряда (1).

Замечание 2. Утверждения, аналогичные теореме 7, справедливы и для случая односторонних пределов $x \rightarrow a + 0$, $x \rightarrow a - 0$. Схема доказательства не изменяется.

Доказательство теоремы. Сначала докажем сходимость числового ряда $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$. В силу критерия Коши, примененного к функциональному ряду (1), для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|u_{n+1}(x) + u_{n+2}(x) + \dots + u_{n+p}(x)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad (3)$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$, всех натуральных p и всех точек x множества $\{x\}$.

Считая в неравенстве (3) фиксированными номера n и p и переходя в этом неравенстве к пределу при $x \rightarrow a$ (такой предельный переход можно осуществить по любой послед-ти точек множества $\{x\}$, сходящейся к т. a), получим

$$|b_{n+1} + b_{n+2} + \dots + b_{n+p}| \leq \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

(для каждого $n \geq N$ и каждого натурального p). В силу критерия Коши ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ сходится.

Оценим теперь разность $S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k$ для всех точек x множества $\{x\}$ из достаточно малой окрестности т. a . Так как $S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(x)$ для всех точек x множества $\{x\}$, то для любого номера n справедливо тождество

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

$$S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k = \left[\sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right] + \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) - \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k,$$

из которого получаем неравенство

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| \leq \left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| + \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right|, \quad (4)$$

справедливое для всех точек x множества $\{x\}$.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как ряд $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$

сходится, а ряд (1) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то для зафиксированного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x множества $\{x\}$

$$\left| \sum_{k=n+1}^{\infty} b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3}, \quad \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k(x) \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (5)$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Так как предел конечной суммы равен сумме пределов слагаемых, то для фиксированного нами $\varepsilon > 0$ и выбранного номера n можно указать $\delta > 0$ такое, что

$$\left| \sum_{k=1}^n u_k(x) - \sum_{k=1}^n b_k \right| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (6)$$

для всех точек x множества $\{x\}$, удовлетворяющих условию $0 < \varrho(x, a) < \delta$. Из (4) – (6) следует, что для всех таких x

$$\left| S(x) - \sum_{k=1}^{\infty} b_k \right| < \varepsilon.$$

Это доказывает существование предела $S(x)$ в точке a , а следовательно, и справедливость равенства (2). *Теорема доказана.*

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Замечание 3. Теперь можно ответить на вопрос, поставленный в примере. Применим теорему 7 в случае одностороннего предела $x \rightarrow 1 - 0$.

Рассматриваемый в примере ряд сходится равномерно на отрезке $[0, 1]$. Для доказательства этого достаточно применить признак Дирихле-Абеля (теорема 5) или, еще проще, третий признак Абеля, сформулированный после теоремы 5.

Поскольку каждый член ряда имеет требуемый предел, то выполнены условия теоремы 7 и к пределу можно переходить почленно, что мы и сделали в примере. Так что последнее равенство, выписанное в этом примере, верное.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

В терминах функц. послед-тей теорема 7 звучит так:

Теорема 7*. Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{x\}$ к предельной функции $f(x)$ и все элементы этой последовательности имеют предел в точке a , то и предельная функция $f(x)$ имеет предел в точке a , причем

$$\lim_{x \rightarrow a} f(x) = \lim_{x \rightarrow a} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\lim_{x \rightarrow a} f_n(x) \right), \quad (7)$$

т. е. символ $\lim_{n \rightarrow \infty}$ предела последовательности и символ $\lim_{x \rightarrow a}$ предела функции можно переставлять местами (или, как говорят, к пределу при $x \rightarrow a$ можно переходить почленно).

Замечание 4. Условие равномерной сходимости в теоремах 7 и 7* существенно. Следующий пример показывает, что в случае отсутствия равномерной сходимости соотн. (7) может не выполняться. Рассмотрим пр. 4 из §2: $f_n(x) = x^n$, $x \in [0, 1]$, $f(x) = 0$ при $x \in [0, 1)$, $f(1) = 1$, сходимость неравном. И

$$\lim_{x \rightarrow 1-0} f_n(x) = 1 \neq 0 = \lim_{x \rightarrow 1-0} f(x).$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Следствие из теоремы 7. Если в условиях теоремы 7 дополнительно потребовать, чтобы точка a принадлежала множеству $\{x\}$ и чтобы все члены $u_k(x)$ функционального ряда (1) были непрерывны в точке a , то и сумма $S(x)$ этого ряда будет непрерывна в точке a .

В самом деле, в этом случае $b_k = u_k(a)$ и равенство (2) принимает вид

$$\lim_{x \rightarrow a} S(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u_k(a) = S(a),$$

а это и означает непрерывность суммы $S(x)$ в точке a .

Применяя это следствие в каждой точке некоторого плотного в себе * множества $\{x\}$, приходим к следующему утверждению.

* Напомним, что множество $\{x\}$ называется *плотным в себе*, если каждая его точка является предельной точкой этого множества.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Теорема 8. *Если все члены функционального ряда (функциональной последовательности) непрерывны на плотном в себе множестве $\{x\}$ и если этот функциональный ряд (эта функциональная последовательность) сходится равномерно на множестве $\{x\}$, то и сумма указанного ряда (предельная функция указанной последовательности) непрерывна на множестве $\{x\}$.*

Замечание 5. Условие равномерной сходимости в теореме 8 существенно. Пример, приведенный в замечании 4 показывает, что если функциональная последовательность, состоящая из непрерывных на отрезке функций, сходится неравномерно на отрезке, то предельная функция этой последовательности может оказаться разрывной на этом множестве.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

2. Интегрируемость.

Теорема 9. Пусть функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ и каждая функция $f_n(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Тогда и предельная функция $f(x)$ интегрируема на этом отрезке, причем указанную послед-ть можно интегрировать на отрезке $[a, b]$ п о ч л е н н о, т. е. существует предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx = \int_a^b \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) dx = \int_a^b f(x) dx. \quad (8)$$

Доказательство. Сначала докажем, что предельная функция $f(x)$ интегрируема на отрезке $[a, b]$. Отметим, что функция $f(x)$ ограничена на $[a, b]$, т. к. каждая функция $f_n(x)$ ограничена на $[a, b]$ и в силу равномерной сходимости для любого $\varepsilon > 0$ и для всех достаточно больших n справедливы неравенства $f_n(x) - \varepsilon < f(x) < f_n(x) + \varepsilon$.

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Достаточно доказать, что для предельной функции $f(x)$ найдется хотя бы одно разбиение отрезка $[a, b]$, для верхней суммы S и нижней суммы s которого справедливо неравенство $S - s < \varepsilon$.

Для этого достаточно показать, что для зафиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется такой номер n , что для *любого* разбиения отрезка $[a, b]$ верхняя сумма S и нижняя сумма s функции $f(x)$ и верхняя сумма S_n и нижняя сумма s_n функции $f_n(x)$ связаны неравенством

$$S - s \leq (S_n - s_n) + \frac{\varepsilon}{2}. \quad (9)$$

В самом деле, если для любого разбиения будет доказана справедливость для некоторого номера n неравенства (9), то в силу интегрируемости на $[a, b]$ функции $f_n(x)$ разбиение можно выбрать так, что будет справедливо неравенство $S_n - s_n < \frac{\varepsilon}{2}$, из которого в силу (9) следует $S - s < \varepsilon$, что и завершает доказательство интегрируемости функции $f(x)$ на $[a, b]$.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Рассмотрим произвольное разбиение $\{x_k\}$ ($k = 1, 2, \dots, m$) отрезка $[a, b]$ и обозначим символом $\omega_k(f_n)$ колебание $*$ на k -ом частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ функции $f_n(x)$, а символом $\omega_k(f)$ колебание на том же отрезке предельной функции $f(x)$.

Неравенство (9) будет доказано, если мы установим, что для достаточно большого номера n справедливо неравенство

$$\omega_k(f) \leq \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (10)$$

В самом деле, умножая (10) на длину $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$ частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ и суммируя получающееся при этом нерав-во по всем $k = 1, 2, \dots, m$, получим неравенство (9).

Установим для любого частичного отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ и для любого достаточно большого номера n справедливость неравенства (10). Для любого номера n и любых двух точек x' и x'' отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо тождество

$$f(x') - f(x'') \equiv [f(x') - f_n(x')] + [f_n(x') - f_n(x'')] + [f_n(x'') - f(x'')],$$

* Напомним, что колебанием функции на любом отрезке называется разность между точной верхней и точной нижней гранями этой функции на указанном отрезке.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

из которого вытекает неравенство

$$|f(x') - f(x'')| \leq |f(x') - f_n(x')| + |f_n(x') - f_n(x'')| + |f_n(x'') - f(x'')|. \quad (11)$$

В силу равномерной на отрезке $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к функции $f(x)$ для фиксированного нами произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер n такой, что для всех точек x отрезка $[a, b]$

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{4(b-a)}. \quad (12)$$

Используя в правой части (11) неравенство (12), взятое для точки $x = x'$ и для точки $x = x''$, получим из (11)

$$|f(x') - f(x'')| < |f_n(x') - f_n(x'')| + \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (13)$$

(для выбранного нами достаточно большого номера n и для любых двух точек x' и x'' отрезка $[x_{k-1}, x_k]$).

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Так как при любом расположении точек x' и x'' на отрезке $[x_{k-1}, x_k]$ справедливо неравенство $|f_n(x') - f_n(x'')| \leq \omega_k(f_n)$, то из (13) получим

$$|f(x') - f(x'')| < \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (14)$$

Заметим, что неравенство (14) справедливо при любом расположении точек x' и x'' на частичном отрезке $[x_{k-1}, x_k]$. Обозначая точную верхнюю и точную нижнюю грани функции $f(x)$ на указанном отрезке соответственно через M_k и m_k , в силу определения точных граней найдем две послед-ти точек $\{x'_p\}$ и $\{x''_p\}$ ($p = 1, 2, \dots$) отрезка $[x_{k-1}, x_k]$ такие, что $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x'_p) = M_k$, $\lim_{p \rightarrow \infty} f(x''_p) = m_k$. В силу (14) для любого p

$$|f(x'_p) - f(x''_p)| < \omega_k(f_n) + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (15)$$

Переходя в неравенстве (15) к пределу при $p \rightarrow \infty$ и замечая, что предел левой части (15) равен $M_k - m_k = \omega_k(f)$, получим в пределе из (15) требуемое неравенство (10).

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Заметим, что если бы мы в условиях теоремы 9 дополнительно потребовали непрерывности каждой функции $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$ (что делается в большинстве учебников по математическому анализу), то доказательство интегрируемости предельной функции $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ стало бы совсем простым: в силу теоремы 8 при таком дополнительном требовании функция $f(x)$ являлась бы непрерывной на отрезке $[a, b]$, а потому и интегрируемой на этом отрезке.

Остается доказать второе утверждение теоремы 9 о том, что интегрирование последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ можно производить почленно. Достаточно доказать, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Но это вытекает из того, что в силу равномерной сходимости $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ существует номер N такой, что для всех x из отрезка $[a, b]$ и для всех номеров n , удовлетворяющих условию $n \geq N$,

$$|f_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (16)$$

Из неравенства (16) и из известных оценок из теории определенного интеграла получим

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon. \end{aligned}$$

Теорема 9 доказана.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Приведем формулировку теоремы 9 в терминах функциональных рядов.

Теорема 9*. Если функциональный ряд (1) сходится к своей сумме $S(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$ и если каждый член этого ряда $u_k(x)$ представляет собой функцию, интегрируемую на отрезке $[a, b]$, то и сумма $S(x)$ интегрируема на этом отрезке, причем указанный ряд можно интегрировать на отрезке $[a, b]$ п о ч л е н н о, т. е. можно утверждать, что числовой ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx$$

сходится и имеет своей суммой $\int_a^b S(x) dx$.

Замечание 1. Аналог теоремы 9 справедлив и для случая, когда функциональная последовательность определена и интегрируема на некотором компактном множестве m -мерного евклидова пространства E^m при $m \geq 2$.

Замечание 2. В следующем параграфе будет доказана еще одна теорема о почленном интегрировании функциональных послед-тей, где вместо равномерной сходимости послед-ти будет рассмотрена другая, более слабая сходимость.

3. Дифференцируемость. Всюду далее под словами "функция $f(x)$ имеет производную на отрезке $[a, b]$ " будем подразумевать, что функция $f(x)$ имеет обычную (двустороннюю) производную в каждой внутренней точке отрезка $[a, b]$, правую производную $f'(a + 0)$ в точке a и левую производную $f'(b - 0)$ в точке b .

Теорема 10. Пусть каждая функция $f_n(x)$ функциональной послед-ти $\{f_n(x)\}$ имеет производную на отрезке $[a, b]$, причем послед-ть производных $\{f'_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а сама послед-ть $\{f_n(x)\}$ сходится хотя бы в одной точке x_0 этого отрезка. Тогда послед-ть $\{f_n(x)\}$ сходится к некоторой предельной функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$, эта функция имеет производную $f'(x)$ всюду на этом отрезке, причем послед-ть можно дифференцировать на отрезке $[a, b]$ п о ч л е н н о, т. е.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

$$f'(x) = \left[\lim_{n \rightarrow \infty} f_n(x) \right]' = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x). \quad (17)$$

Доказательство. Докажем сначала, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$. Из сходимости числовой последовательности $\{f_n(x_0)\}$ и из равномерной на отрезке $[a, b]$ сходимости $\{f'_n(x)\}$ следует, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \quad (18)$$

для всех $n \geq N$, всех натуральных p и для всех x из отрезка $[a, b]$.

Пусть x – произвольная отличная от x_0 точка отрезка $[a, b]$. Так как для функции $[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$ при любых фиксированных номерах n и p выполнены на отрезке, ограниченном точками x и x_0 , все условия теоремы Лагранжа, то между x и x_0 найдется точка ξ такая, что

$$[f_{n+p}(x) - f_n(x)] - [f_{n+p}(x_0) - f_n(x_0)] = [f'_{n+p}(\xi) - f'_n(\xi)](x - x_0).$$

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Из этого равенства и из того, что модуль суммы двух величин не превосходит сумму их модулей, получим, учитывая (18) и неравенство $|x - x_0| \leq b - a$, что $|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$ (для любого x из $[a, b]$, для любого $n \geq N$ и любого натурального p). При $x = x_0$ справедливость последнего неравенства вытекает из первого неравенства (18).

Это и означает, что послед-ть $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к некоторой предельной функции $f(x)$.

Остается доказать, что эта предельная функция в *любой* фиксированной точке x отрезка $[a, b]$ имеет производную (в граничных точках одностороннюю производную) и эта производная является пред. функцией послед-ти $\{f'_n(x)\}$.

Зафиксируем произвольную точку x отрезка $[a, b]$ и по ней число $\delta > 0$ такое, чтобы δ -окрестность точки x целиком содержалась в $[a, b]$ (в случае, если x является граничной точкой отрезка $[a, b]$ под δ -окрестностью точки x будем подразумевать правую полуокрестность $[a, a + \delta)$ точки a и левую полуокрестность $(b - \delta, b]$ точки b).

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Обозначим символом $\{\Delta x\}$ множество всех чисел Δx , удовлетворяющих условию $0 < |\Delta x| < \delta$ при $a < x < b$, условию $0 < \Delta x < \delta$ при $x = a$ и условию $-\delta < \Delta x < 0$ при $x = b$, и докажем, что послед-ть функций аргумента Δx

$$\varphi_n(\Delta x) = \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \quad (19)$$

сходится равномерно на указанном множестве Δx .

Для произвольного $\varepsilon > 0$ в силу критерия Коши равномерн. сходимости послед-ти $\{f'_n(x)\}$ найдется номер N такой, что

$$|f'_{n+p}(x) - f'_n(x)| < \varepsilon \quad (20)$$

для всех x из $[a, b]$, всех $n \geq N$ и всех натуральных p .

Зафиксируем произвольное Δx из множества $\{\Delta x\}$ и при любых фиксированных n и p применим к функции

$$[f_{n+p}(t) - f_n(t)]$$

по отрезку, ограниченному точками x и $x + \Delta x$, теорему Лагранжа.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Согласно этой теореме найдется число θ из интервала $0 < \theta < 1$ такое, что

$$\begin{aligned} & \frac{[f_{n+p}(x+\Delta x) - f_n(x+\Delta x)] - [f_{n+p}(x) - f_n(x)]}{\Delta x} = \\ & = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'_n(x + \theta\Delta x). \end{aligned}$$

Используя обозначение (19), последнее равенство можно переписать в виде

$$\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x) = f'_{n+p}(x + \theta\Delta x) - f'_n(x + \theta\Delta x).$$

Из этого равенства и из (20) заключаем, что

$$|\varphi_{n+p}(\Delta x) - \varphi_n(\Delta x)| < \varepsilon$$

для любого Δx из $\{\Delta x\}$, любого $n \geq N$ и любого натурального p . В силу критерия Коши (теорема 1) последовательность $\{\varphi_n(\Delta x)\}$ сходится равномерно на множестве $\{\Delta x\}$. Но тогда к этой последовательности можно применить теорему 7* о почленном предельном переходе в точке $\Delta x = 0$.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Согласно этой теореме функция

$$\frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x},$$

являющаяся предельной функцией последовательности (19), имеет предел в точке $\Delta x = 0$, причем этот предел можно вычислять почленно, т. е.

$$\begin{aligned} \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f(x + \Delta x) - f(x)}{\Delta x} &= \lim_{\Delta x \rightarrow 0} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \varphi_n(\Delta x) \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \varphi_n(\Delta x) \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\lim_{\Delta x \rightarrow 0} \frac{f_n(x + \Delta x) - f_n(x)}{\Delta x} \right] = \lim_{n \rightarrow \infty} f'_n(x). \end{aligned}$$

Это и доказывает, что производная предельной функции $f(x)$ в точке x существует и справедливо равенство (17).

Теорема доказана.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

В терминах функциональных рядов теорема 10 формулируется так:

Теорема 10*. Пусть каждый член $u_k(x)$ функционального ряда (1) имеет производную на отрезке $[a, b]$, причем ряд из производных $\sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x)$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, а сам ряд (1) сходится хотя бы в одной точке x_0 отрезка $[a, b]$. Тогда ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к некоторой сумме $S(x)$, функция $S(x)$ имеет производную на этом отрезке, а сам ряд (1) можно дифференцировать на отрезке $[a, b]$ почленно:

$$S'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} u'_k(x).$$

Замечание 1. Подчеркнем, что в теореме 10 предполагается только существование на отрезке $[a, b]$ производной у каждого члена $f_n(x)$ функциональной последовательности. Ни ограниченность, ни тем более непрерывность указанной производной не предполагается.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Замечание 2. Если все же дополнительно предположить непрерывность производной у каждого члена послед-ти на отрезке $[a, b]$, то в силу теоремы 8 и предельная функция $f(x)$ будет иметь производную, непрерывную на отрезке $[a, b]$.

Замечание 3. Для функции m переменных теорема 10 может быть сформулирована в следующем виде:

Теорема 10.** Если каждая из функций $f_n(x) = f_n(x_1, x_2, \dots, x_m)$ имеет на замкнутом ограниченном множестве G пространства E^m частную производную $\frac{\partial f_n}{\partial x_k}$ по переменной x_k и если последовательность производных $\left\{ \frac{\partial f_n}{\partial x_k} \right\}$ сходится равномерно на множестве G , а сама последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в каждой точке этого множества, то последовательность $\{f_n(x)\}$ на множестве G можно дифференцировать по переменной x_k почленно.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Из теоремы 10 легко вытекает следующее утверждение о существовании первообразной у предельной функции.

Теорема 11. Пусть каждая функция $f_n(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$, а последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на этом отрезке к предельной функции $f(x)$. Тогда и предельная функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим через $\psi_n(x)$ некоторую первообразную функции $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$. Фиксируем произвольную точку x_0 на этом отрезке и рассмотрим функцию $\varphi_n(x) = \psi_n(x) - \psi_n(x_0)$, которая также является первообразной функции $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$. Для последовательности $\{\varphi_n(x)\}$ выполнены все условия теоремы 10.

Действительно, для всех номеров n справедливо $\varphi_n(x_0) = 0$, т. е. последовательность сходится в точке $x_0 \in [a, b]$, производная $\varphi'_n(x) = f_n(x)$, а по условию последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$, поэтому и последовательность $\{\varphi'_n(x)\}$ сходится равномерно на этом отрезке к функции $f(x)$.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

В силу теоремы 10 получим, что последовательность $\{\varphi_n(x)\}$ сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к некоторой предельной функции $\varphi(x)$, эта функция дифференцируема на этом отрезке и справедливо равенство

$$\varphi'(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \varphi'_n(x) = f(x), \quad \forall x \in [a, b],$$

т. е. функция $f(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.
Теорема доказана.

Замечание. В теореме 11 не требуется ни ограниченность, ни тем более интегрируемость функций $f_n(x)$ на отрезке $[a, b]$.

Сформулируем теорему 11 в терминах функциональных рядов.

Теорема 11* Пусть функциональный ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[a, b]$ к сумме $S(x)$ и каждый член ряда $u_k(x)$ имеет первообразную на этом отрезке. Тогда и сумма ряда $S(x)$ имеет первообразную на отрезке $[a, b]$.

§3. Функциональные свойства суммы ряда и предельной функции последовательности.

Теоремы, доказанные в этом параграфе позволяют нам сделать следующий замечательный вывод:

Утверждение. *Равномерная сходимост не выводит из класса функций, имеющих предел в данной точке (теорема 7), из класса непрерывных функций (теорема 8), из класса интегрируемых функций (теорема 9), из класса функций, имеющих первообразную (теорема 11) и (в случае равномерной сходимости производных) из класса дифференцируемых функций (теорема 10).*

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей

Потребуем, чтобы каждая функция $f_n(x)$ из функциональной послед-ти $\{f_n(x)\}$ и функция $f(x)$ являлись интегрируемыми на отрезке $[a, b]$. Тогда и функция $[f_n(x) - f(x)]^2$ также будет являться интегрируемой на отрезке $[a, b]$.

Введем фундаментальное понятие сходимости в среднем.

Определение 1. Будем говорить, что функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ с х о д и т с я в с р е д н е м на отрезке $[a, b]$ к функции $f(x)$, если существует равный нулю предел

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx = 0. \quad (1)$$

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Определение 2. Будем говорить, что функциональный ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} u_k(x) \quad (2)$$

с х о д и т с я в с р е д н е м на отрезке $[a, b]$ к сумме $S(x)$, если последовательность частичных сумм этого ряда сходится в среднем на отрезке $[a, b]$ к предельной функции $S(x)$.

Замечание. Из определений 1 и 2 непосредственно вытекает, что если функциональная последовательность (функциональный ряд) сходится в среднем к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то эта последовательность (этот ряд) сходится в среднем к $f(x)$ и на любом отрезке $[c, d]$, содержащемся в $[a, b]$.

1. Связь между сходимостью в среднем и другими видами сходимости. В §1 мы ввели понятия сходимости функциональной последовательности на множестве и равномерной сходимости на множестве. Выясним сначала вопрос о связи между сходимостью в среднем и равномерной сходимостью последовательности.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Утверждение 1. Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к функции $f(x)$ равномерно на отрезке $[a, b]$, то эта последовательность сходится к $f(x)$ и в среднем на отрезке $[a, b]$. Обратное неверно.

Доказательство. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу равномерной на отрезке $[a, b]$ сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ для положительного числа $\sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ найдется номер N такой, что $|f_n(x) - f(x)| < \sqrt{\frac{\varepsilon}{2(b-a)}}$ для всех $n \geq N$ и всех точек x отрезка $[a, b]$.

Но тогда в силу известной оценки из теории определенного интеграла

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx \leq \frac{\varepsilon}{2(b-a)} \int_a^b dx = \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon$$

для всех $n \geq N$. Это и означает сходимость послед-ти $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$ в среднем.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Для того чтобы доказать, что обратное утверждение неверно, достаточно привести пример функциональной последовательности, сходящейся в среднем на отрезке $[a, b]$, но равномерно на этом отрезке не сходящейся.

Рассмотрим *пример 2* из п. 4 §2:

$$f_n(x) = \begin{cases} \sin \pi n x, & x \in [0, \frac{1}{n}), \\ 0, & x \in [\frac{1}{n}, 1]. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[0, 1]$ к функции $f(x) \equiv 0$, но сходимость неравномерная. Исследуем последовательность на сходимость в среднем на отрезке $[0, 1]$.

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_0^{\frac{1}{n}} \sin^2 \pi n x dx \leq \int_0^{\frac{1}{n}} dx = \frac{1}{n} \rightarrow 0 \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty.$$

Это означает сходимость последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ на отрезке $[0, 1]$ в среднем. *Утверждение доказано.*

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Покажем теперь, что сходимость на множестве функц. последовательности также не следует из сходимости этой последовательности в среднем на этом множестве.

Утверждение 2. *Сходимость последовательности на некотором отрезке в среднем не влечет за собой не только равномерной на этом отрезке сходимости, но и сходимости хотя бы в одной точке указанного отрезка.*

Приведем соответствующий пример. Рассмотрим последовательность принадлежащих $[0, 1]$ отрезков $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$, имеющих следующий вид:

$$I_1 = [0, 1],$$

$$I_2 = [0, \frac{1}{2}], \quad I_3 = [\frac{1}{2}, 1],$$

$$I_4 = [0, \frac{1}{4}], \quad I_5 = [\frac{1}{4}, \frac{1}{2}], \quad I_6 = [\frac{1}{2}, \frac{3}{4}], \quad I_7 = [\frac{3}{4}, 1],$$

.....

$$I_{2^n} = [0, \frac{1}{2^n}], \quad I_{2^n+1} = [\frac{1}{2^n}, \frac{2}{2^n}], \dots, I_{2^{n+1}-1} = [1 - \frac{1}{2^n}, 1],$$

.....

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Определим n -й член $f_n(x)$ функциональной последовательности $\{f_n(x)\}$ следующим соотношением:

$$f_n(x) = \begin{cases} 1 & \text{на отрезке } I_n, \\ 0 & \text{в остальных точках } [0, 1]. \end{cases}$$

Убедимся в том, что последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится к предельной функции $f(x) \equiv 0$ в среднем на отрезке $[0, 1]$.

В самом деле,

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = \int_{I_n} dx = \text{длине отрезка } I_n,$$

так что существует предел (1).

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Убедимся теперь в том, что *построенная послед-ть не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$* . В самом деле, какую бы точку x_0 отрезка $[0, 1]$ мы ни фиксировали, среди k а к у г о д н о б о л ь ш и х н о м е р о в n найдутся как такие, для которых отрезок I_n содержит точку x_0 (для этих номеров $f_n(x_0) = 1$), так и такие, для которых отрезок I_n не содержит точку x_0 (для таких номеров $f_n(x_0) = 0$). Таким образом, последовательность $\{f_n(x_0)\}$ содержит бесконечно много членов, равных единице, и бесконечно много членов, равных нулю. Такая последовательность является расходящейся. Утверждение доказано.

Осталось выяснить, следует ли сходимость функциональной последовательности в среднем на множестве из обычной сходимости этой последовательности на множестве.

Утверждение 3. *Сходимость последовательности на некотором отрезке не влечет за собой сходимости этой последовательности в среднем на этом отрезке.*

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Приведем соответствующий *пример*. Рассмотрим функциональную последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} n e^{-nx}, & \text{при } x \in (0, 1], \\ 0, & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится на отрезке $[0, 1]$ к предельной функции $f(x) \equiv 0$. Выясним, сходится ли она в среднем на этом отрезке.

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = n^2 \int_0^1 e^{-2nx} dx = \frac{n}{2}(1 - e^{-2n}) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty.$$

Это означает, что предела (1) не существует и послед-ть $\{f_n(x)\}$ не сходится в среднем на отрезке $[0, 1]$. Утверждение доказано.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

2. Теорема о почленном интегрировании. Оказывается, сходимость последовательности в среднем обеспечивает возможность почленного интегрирования этой послед-ти:

Теорема 12. *Если последовательность $\{f_n(x)\}$ сходится в среднем к $f(x)$ на отрезке $[a, b]$, то эту последовательность можно почленно интегрировать на отрезке $[a, b]$, т. е. предел*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_a^b f_n(x) dx$$

существует и равен $\int_a^b f(x) dx$.

Прежде всего докажем лемму, содержащую важное неравенство. Это неравенство потребуется нам и в следующей главе.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Лемма 1. Для любых интегрируемых на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$ и $g(x)$ справедливо неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)g(x) dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b f^2(x) dx} \cdot \sqrt{\int_a^b g^2(x) dx}, \quad (3)$$

называемое **н е р а в е н с т в о м К о ш и - Б у н я к о в с к о г о**.

Доказательство леммы. При выполнении условия

$\int_a^b g^2(x) dx \neq 0$ рассмотрим следующий квадратный трехчлен относительно λ

$$\begin{aligned} & \int_a^b [f(x) - \lambda g(x)]^2 dx = \\ &= \int_a^b f^2(x) dx - 2\lambda \int_a^b f(x)g(x) dx + \lambda^2 \int_a^b g^2(x) dx \geq 0. \end{aligned}$$

Так как этот трехчлен неотрицателен, то он не имеет различных вещественных корней.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Но тогда его дискриминант неположителен, т. е.

$$\left(\int_a^b f(x)g(x) dx \right)^2 - \int_a^b f^2(x) dx \int_a^b g^2(x) dx \leq 0, \quad (4)$$

откуда следует неравенство (3).

Если $\int_a^b g^2(x) dx = 0$, а $\int_a^b f^2(x) dx \neq 0$, то рассмотрим другой квадратный трехчлен относительно λ

$$\int_a^b [\lambda f(x) - g(x)]^2 dx \geq 0.$$

Проведя аналогичные рассуждения, получим неравенство (4), а из него неравенство (3).

Пусть теперь $\int_a^b g^2(x) dx = \int_a^b f^2(x) dx = 0$.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Из следующих двух очевидных неравенств

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) + g(x))^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx + 2 \int_a^b f(x)g(x) dx = \\ &= 2 \int_a^b f(x)g(x) dx \geq 0\end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned}\int_a^b (f(x) - g(x))^2 dx &= \int_a^b f^2(x) dx + \int_a^b g^2(x) dx - 2 \int_a^b f(x)g(x) dx = \\ &= -2 \int_a^b f(x)g(x) dx \geq 0\end{aligned}$$

закключаем, что $\int_a^b f(x)g(x) dx = 0$, т. е. неравенство (3)

справедливо и в этом случае. *Лемма доказана.*

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Доказательство теоремы 12. Используя неравенство (3) при $g(x) \equiv 1$, будем иметь

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| = \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx} \sqrt{\int_a^b dx} = \sqrt{(b-a)} \sqrt{\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx} \rightarrow 0$$

при $n \rightarrow \infty$. Теорема доказана.

Представляет интерес и другой способ обоснования теоремы 12, не использующий неравенство Коши-Буняковского (3).

Второе доказательство теоремы 12. Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. В силу сходимости последовательности $\{f_n(x)\}$ к $f(x)$ в среднем на отрезке $[a, b]$ найдется номер N такой, что для всех $n \geq N$

$$\int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{b-a}. \quad (5)$$

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Записав очевидное неравенство $|A| \cdot |B| \leq \frac{A^2}{2} + \frac{B^2}{2}$ для величин

$$A = [f_n(x) - f(x)] \sqrt{\frac{b-a}{\varepsilon}}; \quad B = \sqrt{\frac{\varepsilon}{b-a}},$$

получим

$$|f_n(x) - f(x)| \leq [f_n(x) - f(x)]^2 \cdot \frac{b-a}{2\varepsilon} + \frac{\varepsilon}{2(b-a)}. \quad (6)$$

Из (6) и известной оценки из теории определенного интеграла следует

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx \leq \frac{b-a}{2\varepsilon} \int_a^b [f_n(x) - f(x)]^2 dx + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Отсюда и из (5) ясно, что при всех $n \geq N$

$$\int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \quad (7)$$

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Так как

$$\begin{aligned} \left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| &= \left| \int_a^b [f_n(x) - f(x)] dx \right| \leq \\ &\leq \int_a^b |f_n(x) - f(x)| dx, \end{aligned}$$

то из (7) получим, что для всех номеров $n \geq N$

$$\left| \int_a^b f_n(x) dx - \int_a^b f(x) dx \right| < \varepsilon.$$

Теорема доказана.

Сформулируем теорему 12 в терминах функц. рядов.

Теорема 12*. Если функц. ряд (2) сходится в среднем на отрезке $[a, b]$ к сумме $S(x)$, то его можно почленно

интегрировать, т. е. $\int_a^b S(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x) dx.$

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Замечание. В рамках интеграла Римана нельзя гарантировать единственности предельной функции у последовательности, сходящейся в среднем, так как при изменении подинтегральной функции в конечном числе точек (на множестве меры нуль) интеграл не изменяется (в рамках интеграла Лебега можно гарантировать единственность предельной функции).

Продолжим изучение вопроса о связи между возможностью почленного интегрирования функциональных послед-тей и различными видами сходимости этих последовательностей.

Утверждение 4. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится равномерно на этом отрезке.*

Это следует из того, что послед-ть, не сходящаяся равномерно на отрезке, может сходиться в среднем на этом отрезке (см. утверждение 1 и пример, приведенный для обоснования этого утверждения), но тогда по теореме 12 эта послед-ть допускает почленное интегрирование на отрезке.

Утверждение доказано.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Утверждение 5. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что послед-ть сходится на этом отрезке (хотя бы в одной точке).*

Для доказательства этого утверждения сошлемся на пример, приведенный для обоснования утверждения 2. Послед-ть в этом примере не сходится ни в одной точке отрезка $[0, 1]$, но она сходится в среднем на этом отрезке и следовательно, допускает почленное интегрирование. Утверждение доказано.

Утверждение 6. *Из того, что последовательность можно почленно интегрировать на некотором отрезке не следует, что последовательность сходится в среднем на этом отрезке.*

Приведем соответствующий пример. Рассмотрим послед-ть

$$f_n(x) = \begin{cases} n^{\frac{3}{4}} e^{-nx}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases} \quad (8)$$

Эта последовательность сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к нулю, т. е. предельная функция $f(x) \equiv 0$.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Сходимости в среднем на $[0, 1]$ нет, поскольку

$$\int_0^1 [f_n(x) - f(x)]^2 dx = n^{\frac{6}{4}} \int_0^1 e^{-2nx} dx = \frac{\sqrt{n}}{2} (1 - e^{-2n}) \rightarrow +\infty, n \rightarrow \infty.$$

Вместе с тем, рассматриваемая последовательность допускает почленное интегрирование на отрезке $[0, 1]$,

поскольку $\int_0^1 f(x) dx = 0$ и

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 f_n(x) dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^1 n^{\frac{3}{4}} e^{-nx} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{1}{\sqrt[4]{n}} (1 - e^{-n}) \right] = 0.$$

Утверждение доказано.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Утверждение 7. *Из того, что последовательность сходится в каждой точке некоторого отрезка не следует, что ее можно почленно интегрировать на этом отрезке.*

В качестве примера можно рассмотреть последовательность из обоснования утверждения 3. Но приведем еще один *пример*. Рассмотрим последовательность

$$f_n(x) = \begin{cases} n^2 e^{-nx}, & x \in (0, 1], \\ 0, & x = 0. \end{cases}$$

Эта последовательность сходится в каждой точке отрезка $[0, 1]$ к нулю, т. е. предельная функция $f(x) \equiv 0$, соответственно,

$$\int_0^1 f(x) dx = 0. \text{ При этом}$$

$$\int_0^1 f_n(x) dx = n^2 \int_0^1 e^{-nx} dx = n(1 - e^{-n}) \rightarrow +\infty \quad \text{при} \quad n \rightarrow \infty,$$

т. е. послед-ть не допускает почленного интегрирования.

Утверждение доказано.

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

В заключение приведем простые необходимые условия почленной интегрируемости и сходимости в среднем функциональных последовательностей.

Необходимым условием почленной интегрируемости последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ является ограниченность числовой последовательности $\left\{ \int_a^b f_n(x) dx \right\}$.

Заметим, что сама последовательность $\{f_n(x)\}$ может оказаться неограниченной на отрезке $[a, b]$ (см. пример к утверждению б).

§4. Сходимость в среднем. Теорема о почленном интегрировании функциональных последовательностей.

Необходимым условием сходимости в среднем на отрезке $[a, b]$ последовательности $\{f_n(x)\}$ к некоторой функции $f(x)$ является ограниченность числовой последовательности

$$\left\{ \int_a^b f_n^2(x) dx \right\}.$$

Докажем последнее утверждение. Воспользуемся очевидным неравенством $(a + b)^2 \leq 2(a^2 + b^2)$:

$$\begin{aligned} \int_a^b f_n^2(x) dx &= \int_a^b [(f_n(x) - f(x)) + f(x)]^2 dx \leq \\ &\leq 2 \int_a^b (f_n(x) - f(x))^2 dx + 2 \int_a^b f^2(x) dx, \end{aligned}$$

первый интеграл в правой части стремится к нулю при $n \rightarrow \infty$, а второй – есть постоянная величина. Это доказывает утверждение.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

ГЛАВА 2. Функциональные последовательности и ряды. §5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела

Предположим, что каждая из функций $f_n(x)$ функцион. последовательности $\{f_n(x)\}$ определена на некотором плотном в себе множестве $\{x\}$ пространства E^m .

Определение. Последовательность $\{f_n(x)\}$ называется *равностепенно непрерывной* на множестве $\{x\}$, если для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon \quad (1)$$

справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' множества $\{x\}$, связанных условием $\varrho(x', x'') < \delta$.

Из этого определения очевидно, что если послед-ть $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на множестве $\{x\}$, то и любая ее подпослед-ть равностепенно непрерывна на этом множестве.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Для простоты будем рассматривать последовательность $\{f_n(x)\}$ функций *одной* переменной x , равностепенно непрерывную на отрезке $[a, b]$. По определению для любого $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что неравенство (1) справедливо для всех номеров n и всех точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, связанных условием $|x' - x''| < \delta$.

В качестве *примера* рассмотрим последовательность $f_n(x) = (-1)^n x$. Эта последовательность равностепенно непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, так как для любого $\varepsilon > 0$ можно взять любое $\delta \in (0, \varepsilon)$, так что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |(-1)^n x' - (-1)^n x''| = |x' - x''| < \delta < \varepsilon$$

для всех номеров n и всех точек x' и x'' отрезка $[a, b]$, связанных условием $|x' - x''| < \delta$. Заметим при этом, что во всех точках $x \neq 0$ числовой прямой последовательность $\{f_n(x)\}$ расходится.

Докажем утверждение, представляющее собой функцион. аналог теоремы Больцано-Вейерштрасса.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Теорема 13 (теорема Арцела *). *Если функциональная последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна и равномерно ограничена на отрезке $[a, b]$, то из этой послед-ти можно выделить подпоследовательность, сходящуюся равномерно на отрезке $[a, b]$.*

Доказательство. Рассмотрим на отрезке $[a, b]$ следующую специальную последовательность точек $\{x_n\}$: в качестве x_1 возьмем точку, которая делит отрезок $[a, b]$ на две равные части, в качестве x_2 и x_3 возьмем те две точки, которые вместе с x_1 делят отрезок $[a, b]$ на четыре равные части, в качестве x_4, x_5, x_6 и x_7 возьмем те четыре точки, которые вместе с x_1, x_2 и x_3 делят отрезок $[a, b]$ на восемь равных частей и т. д.

Построенная последовательность обладает следующим с в о й с т в о м: для любого $\delta > 0$ найдется номер n_0 такой, что на любом принадлежащем $[a, b]$ отрезке длины δ лежит хотя бы один из элементов $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ [†].

* Чезаре Арцела (1847 – 1912) – итальянский математик.

[†] Про последовательность, обладающую таким свойством, говорят, что она является *всюду плотной* на отрезке $[a, b]$.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Приступим теперь к выделению из последовательности $\{f_n(x)\}$ равномерно на отрезке $[a, b]$ сходящейся подпослед-ти. Сначала рассмотрим последовательность $\{f_n(x)\}$ в точке x_1 . Получим ограниченную числовую последовательность $\{f_n(x_1)\}$, из которой на основании теоремы Больцано-Вейерштрасса можно выделить сходящуюся подпослед-ть, которую мы обозначим как:

$$f_{11}(x_1), f_{12}(x_1), \dots, f_{1n}(x_1), \dots$$

Далее рассмотрим функциональную последовательность

$$f_{11}(x), f_{12}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots$$

в точке x_2 . По теореме Больцано-Вейерштрасса из нее можно выделить сходящуюся подпоследовательность, которую мы обозначим как:

$$f_{21}(x_2), f_{22}(x_2), \dots, f_{2n}(x_2), \dots$$

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Таким образом, функциональная последовательность

$$f_{21}(x), f_{22}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots \quad (2)$$

является сходящейся и в точке x_1 , и в точке x_2 .

Далее рассматриваем функциональную последовательность (2) в точке x_3 и выделяем из нее сходящуюся подпоследовательность

$$f_{31}(x_3), f_{32}(x_3), \dots, f_{3n}(x_3), \dots$$

Продолжая аналогичные рассуждения, получим бесконечное множество подпоследовательностей

$$\begin{array}{l} f_{11}(x), f_{12}(x), f_{13}(x), \dots, f_{1n}(x), \dots; \\ f_{21}(x), f_{22}(x), f_{23}(x), \dots, f_{2n}(x), \dots; \\ f_{31}(x), f_{32}(x), f_{33}(x), \dots, f_{3n}(x), \dots; \\ \vdots \\ f_{n1}(x), f_{n2}(x), f_{n3}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots; \\ \vdots \end{array}$$

причем подпоследовательность, стоящая в n -ой строке, является сходящейся в каждой из точек $x_1, x_2, \dots, x_n$.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Рассмотрим теперь так называемую "диагональную" последовательность

$$f_{11}(x), f_{22}(x), f_{33}(x), \dots, f_{nn}(x), \dots$$

Докажем, что эта последовательность равномерно сходится на отрезке $[a, b]$. Для сокращения записи будем в дальнейшем обозначать эту диагональную последовательность (как и исходную последовательность) символом

$$f_1(x), f_2(x), f_3(x), \dots, f_n(x), \dots$$

(т. е. вместо сдвоенного индекса будем писать одинарный).

Зафиксируем произвольное $\varepsilon > 0$. Так как диагональная последовательность является равностепенно непрерывной на отрезке $[a, b]$, то для фиксированного $\varepsilon > 0$ найдется $\delta > 0$ такое, что каковы бы ни были две точки x и x_m из отрезка $[a, b]$, связанные неравенством $|x - x_m| < \delta$, для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f_n(x) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3}. \quad (3)$$

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Заметив это, разобьем отрезок $[a, b]$ на *конечное* число отрезков длины, меньшей δ . Из последовательности $\{x_n\}$ выберем конечное число n_0 первых членов $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$ настолько большое, чтобы в каждом из упомянутых отрезков содержалась хотя бы одна из точек $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$.

Очевидно, диагональная последовательность сходится в каждой из точек $x_1, x_2, \dots, x_{n_0}$. Поэтому для фиксированного выше $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| < \frac{\varepsilon}{3} \quad (4)$$

для всех $n \geq N$, всех натуральных p и всех $m = 1, 2, \dots, n_0$.

Пусть теперь x – произвольная точка отрезка $[a, b]$. Эта точка обязательно лежит в одном из упомянутых выше отрезков длины, меньшей δ . Поэтому для этой точки x найдется хотя бы одна точка x_m (m – один из номеров, равных $1, 2, \dots, n_0$), удовлетворяющая условию $|x - x_m| < \delta$.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

В силу того, что модуль суммы трех величин не превосходит суммы их модулей, можем записать:

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| \leq |f_{n+p}(x) - f_{n+p}(x_m)| + |f_{n+p}(x_m) - f_n(x_m)| + |f_n(x_m) - f_n(x)|. \quad (5)$$

Второй член в правой части (5) оценим с помощью неравенства (4), а для оценки первого и третьего членов правой части (5) учтем, что $|x - x_m| < \delta$, и используем неравенство (3), справедливое для любого номера n (а следовательно, и для любого $n + p$). Окончательно получим, что для произвольного $\varepsilon > 0$ найдется номер N такой, что

$$|f_{n+p}(x) - f_n(x)| < \varepsilon$$

для всех $n \geq N$, всех натуральных p и любой точки x из $[a, b]$. Равномерная сходимость диагональной последовательности доказана. *Теорема доказана.*

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Замечание 1. В теореме Арцела вместо равномерной ограниченности последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ достаточно потребовать ограниченности этой послед-ти х о т я б ы в о д н о й т о ч к е этого отрезка.

В самом деле, справедливо следующее утверждение:

если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на отрезке $[a, b]$ и ограничена хотя бы в одной точке x_0 этого отрезка, то эта последовательность равномерно ограничена на отрезке $[a, b]$.

Для доказательства этого утверждения заметим, что по определению равностепенной непрерывности для $\varepsilon = 1$ найдется $\delta > 0$ такое, что колебание любой функции $f_n(x)$ на любом отрезке длины, не превышающей δ , не превосходит числа $\varepsilon = 1$.

Так как весь отрезок $[a, b]$ можно покрыть конечным числом n_0 отрезков длины, не превышающей δ , то колебание любой функции $f_n(x)$ на всем отрезке $[a, b]$ не превосходит числа n_0 .

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Но тогда из неравенства $|f_n(x_0)| \leq A$, выражающего ограниченность последовательности $\{f_n(x)\}$ в точке x_0 , вытекает неравенство $|f_n(x)| \leq A + n_0$, справедливое для любой точки x из отрезка $[a, b]$ и выражающее равномерную ограниченность рассматриваемой последовательности на этом отрезке.

Замечание 2. Установим достаточный признак равностепенной непрерывности:

если последовательность $\{f_n(x)\}$ состоит из дифференцируемых на отрезке $[a, b]$ функций и если последовательность производных $\{f'_n(x)\}$ равномерно ограничена на этом отрезке, то последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на отрезке $[a, b]$.

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

Для доказательства возьмем на отрезке $[a, b]$ две произвольные точки x' и x'' и запишем для функции $f_n(x)$ на отрезке $[x', x'']$ формулу Лагранжа.

Согласно теореме Лагранжа на отрезке $[x', x'']$ найдется точка ξ_n такая, что

$$|f_n(x') - f_n(x'')| = |f'_n(\xi_n)| \cdot |x' - x''|. \quad (6)$$

Поскольку последовательность производных $\{f'_n(x)\}$ равномерно ограничена на отрезке $[a, b]$, найдется постоянная $A > 0$ такая, что для всех номеров n справедливо неравенство

$$|f'_n(\xi_n)| \leq A. \quad (7)$$

Подставляя (7) в (6), получим

$$|f_n(x') - f_n(x'')| \leq A|x' - x''|. \quad (8)$$

Зафиксируем любое $\varepsilon > 0$. Тогда, взяв $\delta = \frac{\varepsilon}{A}$ и используя (8), получим, что для всех номеров n и всех x' и x'' из $[a, b]$, связанных условием $|x' - x''| < \delta$, будет справедливо неравенство

§5. Равностепенная непрерывность последовательности функций. Теорема Арцела.

$$|f_n(x') - f_n(x'')| < \varepsilon.$$

Равностепенная непрерывность последовательности $\{f_n(x)\}$ на отрезке $[a, b]$ доказана.

В качестве примера рассмотрим последовательность $\left\{\frac{\sin^2 nx}{n}\right\}$. Эта последовательность равностепенно непрерывна на любом отрезке $[a, b]$, так как на любом отрезке $[a, b]$ последовательность из производных $\{\sin 2nx\}$ равномерно ограничена.

Задача. Докажите следующий признак равномерной сходимости функциональной последовательности: если последовательность $\{f_n(x)\}$ равностепенно непрерывна на отрезке $[a, b]$ (на интервале (a, b)) и сходится в каждой точке этого множества, то она равномерно сходится на этом множестве.

Замечание 3. Понятие равностепенной непрерывности можно вводить не по отношению к последовательности функций, а по отношению к любому бесконечному множеству функций.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§6. Степенные ряды

1. Степенной ряд и область его сходимости. *Степенным рядом* называется функциональный ряд вида

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots, \quad (1)$$

где $a_0, a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ – постоянные вещественные числа, называемые *коэффициентами* ряда (1). Постараемся выяснить, как устроена область сходимости любого степенного ряда.

Заметим, что *всякий степенной ряд сходится в точке $x = 0$* , причем существуют степенные ряды, сходящиеся только в этой точке (например, ряд $\sum_{n=1}^{\infty} n^n x^n$).

Составим с помощью коэффициентов a_n ряда (1) следующую числовую последовательность:

$$\{ \sqrt[n]{|a_n|} \} \quad (n = 1, 2, \dots). \quad (2)$$

Возможны два случая: 1) послед-ть (2) является *неограниченной*; 2) послед-ть (2) является *ограниченной*.

В случае 2) у последовательности (2) существует *конечный* верхний предел, который мы обозначим через L ,

$$L = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$$

Этот верхний предел L заведомо неотрицателен (так как все элементы послед-ти (2) неотрицательны, а следовательно, и любая предельная точка этой послед-ти неотрицательна).

Итак, могут представиться следующие три случая: I) послед-ть (2) является неограниченной; II) послед-ть (2) является ограниченной и имеет конечный верхний предел $L > 0$; III) послед-ть (2) является ограниченной и имеет верхний предел $L = 0$.

Докажем следующее замечательное утверждение.

Теорема 14 (теорема Коши-Адамара *). I. Если послед-ть (2) неограничена, то степенной ряд (1) сходится лишь при $x = 0$.

II. Если последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$, то ряд (1) абсолютно сходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится для значений x , удовлетворяющих неравенству $|x| > \frac{1}{L}$.

III. Если послед-ть (2) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$, то ряд (1) абсолютно сходится для всех значений x .

Доказательство. I. Пусть послед-ть (2) не ограничена. Тогда при $x \neq 0$ послед-ть

$$|x| \sqrt[n]{|a_n|} = \sqrt[n]{|a_n x^n|}$$

также не ограничена, т. е. у этой послед-ти имеются члены со сколь угодно большими номерами n , удовлетворяющие неравенству $\sqrt[n]{|a_n x^n|} > 1$, или $|a_n x^n| > 1$. Но это означает, что для ряда (1) (при $x \neq 0$) нарушено необходимое условие сходимости (см. §1 гл. 1), т. е. ряд (1) расходится при $x \neq 0$.

* Жак Соломон Адамар (1865 – 1963) – французский математик

II. Пусть последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел $L > 0$. Докажем, что ряд (1) абсолютно сходится при $|x| < \frac{1}{L}$, и расходится при $|x| > \frac{1}{L}$.

а) Зафиксируем сначала любое x , удовлетворяющее неравенству $|x| < \frac{1}{L}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $|x| < \frac{1}{L+\varepsilon}$. В силу свойств верхнего предела все элементы $\sqrt[n]{|a_n|}$, начиная с некоторого номера n , удовлетворяют неравенству

$$\sqrt[n]{|a_n|} < L + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Таким образом, начиная с этого номера n , справедливо неравенство

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{L + \frac{\varepsilon}{2}}{L + \varepsilon} < 1,$$

т. е. ряд (1) абсолютно сходится по признаку Коши (см. п. 3 §2 гл. 1).

§6. Степенные ряды.

б) Зафиксируем теперь любое x , удовлетворяющее неравенству $|x| > \frac{1}{L}$. Тогда найдется $\varepsilon > 0$, такое, что $|x| > \frac{1}{L-\varepsilon}$. По определению верхнего предела из последовательности (2) можно выделить подпослед-ть $\{\sqrt[n_k]{|a_{n_k}|}\} (k = 1, 2, \dots)$, сходящуюся к L . Но это означает, что, начиная с некоторого номера k , справедливо неравенство

$$L - \varepsilon < \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} < L + \varepsilon.$$

Таким образом, начиная с этого номера k , справедливо неравенство

$$\sqrt[n_k]{|a_{n_k} x^{n_k}|} = |x| \sqrt[n_k]{|a_{n_k}|} > \frac{L - \varepsilon}{L - \varepsilon} = 1,$$

или

$$|a_{n_k} x^{n_k}| > 1,$$

т. е. нарушено необходимое условие сходимости ряда (1) и этот ряд расходится.

III. Пусть последовательность (2) ограничена и имеет верхний предел $L = 0$. Докажем, что ряд (1) абсолютно сходится при любом x .

Зафиксируем произвольное $x \neq 0$ (при $x = 0$ ряд (1) заведомо абсолютно сходится). Поскольку верхний предел $L = 0$ и последовательность (2) не может иметь отрицательных предельных точек, число $L = 0$ является *единственной предельной точкой*, а следовательно, является *пределом* этой последовательности, т. е. последовательность (2) является бесконечно малой.

Но тогда для положительного числа $\varepsilon = \frac{1}{2|x|}$ найдется номер, начиная с которого

$$\sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2|x|}.$$

Следовательно, начиная с указанного номера

$$\sqrt[n]{|a_n x^n|} = |x| \sqrt[n]{|a_n|} < \frac{1}{2} < 1,$$

т. е. ряд (1) абсолютно сходится по признаку Коши (см. п. 3 §2 гл. 1). *Теорема полностью доказана.*

Доказанная теорема приводит к след. фундаментальному утверждению.

Теорема 15. *Для каждого степенного ряда (1), если он не является рядом, сходящимся лишь в точке $x = 0$, существует положительное число R (возможно, равное бесконечности) такое, что этот ряд абсолютно сходится при $|x| < R$ и расходится при $|x| > R$.*

Это число R называется *радиусом сходимости* рассматриваемого степенного ряда, а интервал $(-R, R)$ называется *промежутком (или интервалом) сходимости* этого ряда. Для вычисления радиуса сходимости справедлива формула

$$R = \frac{1}{\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}} \quad (3)$$

(в случае, когда $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|} = 0, R = \infty$).

Замечание 1. На концах промежутка сходимости, т. е. в точках $x = -R$ и $x = R$, степенной ряд может быть как сходящимся, так и расходящимся[†]. Покажем это на примерах.

Примеры. 1. Для ряда $1 + \sum_{n=1}^{\infty} x^n$ радиус сходимости R равен единице, промежуток сходимости имеет вид $(-1, 1)$, и этот ряд расходится на концах этого промежутка.

2. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^2}$ промежуток сходимости $(-1, 1)$, область сходимости $[-1, 1]$, причем на концах промежутка сходимости ряд сходится абсолютно.

3. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$ промежуток сходимости $(-1, 1)$, область сходимости $[-1, 1)$, причем в точке $x = -1$ ряд сходится условно.

[†]Отметим следующую теорему Абеля: если степенной ряд (1) сходится при $x = R$, то сумма его $S(x)$ является непрерывной в точке R слева. Без ограничения общности можно считать, что $R = 1$, но в таком виде теорема Абеля (фактически утверждающая регулярность метода суммирования Пуассона-Абеля) доказана в п. 2 §8 гл. 1.

4. Для ряда $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^n}{n}$ промежуток сходимости $(-1, 1)$, область сходимости $(-1, 1]$, причем в точке $x = 1$ ряд сходится условно.

Замечание 2. Все результаты настоящего пункта справедливы для ряда (1), в котором вещественная переменная x заменена комплексной переменной z и в котором коэффициенты являются комплексными числами. Для такого ряда устанавливается существование положительного числа R такого, что ряд абсолютно сходится при $|z| < R$ и расходится при $|z| > R$. Для вычисления R справедлива формула (3). Число R называется *радиусом сходимости*, а область $|z| < R$ – *кругом сходимости* степенного ряда.

2. Функциональные свойства степенных рядов. Во всех утверждениях этого раздела считаем, что ряд (1) сходится не только в нуле, т. е. он имеет радиус сходимости $R > 0$.

Лемма 2. *Каково бы ни было положительное число r , удовлетворяющее условию $r < R$, ряд (1) равномерно сходится на отрезке $[-r, r]$, т. е. при $|x| \leq r$.*

Доказательство. В силу теоремы 15 ряд (1) абсолютно сходится при $x = r$, т. е. сходится ряд

$$|a_0| + \sum_{n=1}^{\infty} |a_n| r^n.$$

Но этот числовой ряд служит мажорантным для ряда (1) при всех x из отрезка $[-r, r]$. На основании признака Вейерштрасса ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$. *Лемма доказана.*

Следствие из леммы 2. *В условиях леммы сумма ряда (1) является функцией, непрерывной на отрезке $[-r, r]$ (в силу теоремы 8).*

Задача. Докажите следующее утверждение. Если ряд (1) сходится в точках $x = R$ и $x = -R$, то он сходится равномерно на отрезке $[-R, R]$.

Теорема 16. Сумма степенного ряда внутри его промежутка сходимости является непрерывной функцией.

Доказательство. Пусть $S(x)$ – сумма степенного ряда (1), а R – его радиус сходимости. Зафиксируем любое число $x \in (-R, R)$. Всегда найдется число r такое, что $|x| < r < R$. В силу следствия из леммы 2 функция $S(x)$ непрерывна на отрезке $[-r, r]$. Следовательно, $S(x)$ непрерывна и в точке x . Теорема доказана.

Теорема 17. Зафиксируем любое число $x \in (-R, R)$. Тогда ряд (1) можно почленно интегрировать на отрезке, ограниченном точками 0 и x . Полученный в результате почленного интегрирования ряд имеет тот же радиус сходимости R , что и исходный ряд.

Доказательство. Для любого x , удовлетворяющего условию $|x| < R$, найдется число r такое, что $|x| < r < R$. Согласно лемме 2 ряд (1) сходится равномерно на отрезке $[-r, r]$, а следовательно, и на указанном отрезке.

Но тогда в силу теоремы 9 этот ряд можно почленно интегрировать на этом отрезке.

Не ограничивая общности будем считать, что $x > 0$ и проинтегрируем ряд (1) почленно на отрезке $[0, x]$. В результате получится степенной ряд $a_0x + \frac{a_1}{2}x^2 + \dots + \frac{a_{n-1}}{n}x^n + \dots$, радиус сходимости которого (согласно теореме 15) является величиной, обратной верхнему пределу последовательности

$$\sqrt[n]{\frac{|a_{n-1}|}{n}} = \frac{\sqrt[n]{|a_{n-1}|}}{\sqrt[n]{n}}, \quad (4)$$

а верхний предел послед-ти (4) тот же, что и у послед-ти (2) [‡].
Теорема доказана.

[‡]Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n} = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n-1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n+1]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \}^{\frac{n}{n+1}} =$
 $= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$

Теорема 18. *Степенной ряд (1) внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно. Ряд, полученный почленным дифференцированием, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Доказательство. Достаточно (в силу теоремы 10* и леммы 2) доказать лишь второе утверждение теоремы. В результате почленного дифференцирования (1) получим ряд

$$a_1 + 2a_2x + \dots + na_nx^{n-1} + (n+1)a_{n+1}x^n + \dots,$$

радиус сходимости R которого (согласно теореме 15) обратен вернему пределу последовательности

$$\{ \sqrt[n]{(n+1)|a_{n+1}|} \}, \quad (5)$$

а последовательность (5) имеет тот же верхний предел, что и последовательность (2)[§]. Теорема доказана.

[§] Так как $\lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{n+1} = 1$, $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_{n+1}|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} n^{-1} \sqrt[n]{|a_n|} = \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \{ \sqrt[n]{|a_n|} \}^{\frac{n}{n-1}} =$
 $= \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{|a_n|}.$

Следствие из теоремы 18. *Степенной ряд внутри его промежутка сходимости можно дифференцировать почленно сколько угодно раз. Ряд, полученный n -кратным почленным дифференцированием исходного степенного ряда, имеет тот же радиус сходимости, что и исходный ряд.*

Таким образом, сумма $S(x)$ степенного ряда (1) является бесконечно дифференцируемой функцией на интервале $(-R, R)$, т. е. для любого номера n существует производная $S^{(n)}(x)$, непрерывная на интервале $(-R, R)$. Это записывают следующим образом: $S(x) \in C^\infty(-R, R)$, где $C^\infty(-R, R)$ – класс всех бесконечно дифференцируемых на интервале $(-R, R)$ функций.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

3. Разложение функций в степенные ряды.

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots \quad (1)$$

Определение 1. Будем говорить, что функция $f(x)$ на множестве $\{x\}$ может быть разложена в степенной ряд, если существует степенной ряд, сходящийся к $f(x)$ на указанном множестве.

Определение 2. Степенной ряд (1), коэффициенты которого определяются формулой

$$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!} \quad (6)$$

называется *рядом Тейлора* функции $f(x)$.

Приведем необходимые условия того, чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд.

Утверждение 1. Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в степенной ряд на интервале $(-R, R)$, необходимо, чтобы эта функция имела на указанном интервале непрерывные производные любого порядка, т. е. $f(x) \in C^\infty(-R, R)$. Если функция $f(x)$ может быть на интервале $(-R, R)$ разложена в степенной ряд, то лишь единственным образом. Этот ряд является рядом Тейлора функции $f(x)$.

Доказательство. Степенной ряд внутри его промежутка сходимости, который во всяком случае содержит интервал $(-R, R)$, можно почленно дифференцировать сколько угодно раз, причем все полученные при этом ряды сходятся равномерно внутри того же промежутка сходимости (теорема 18). Но тогда суммы рядов, полученных сколь угодно кратным дифференцированием (в силу теоремы 16), представляют собой функции, непрерывные внутри указанного промежутка сходимости, а следовательно, непрерывные на интервале $(-R, R)$.

§6. Степенные ряды.

Пусть функция $f(x)$ может быть разложена на интервале $(-R, R)$ в степенной ряд (1). Дифференцируя этот ряд почленно n раз (что заведомо можно делать внутри интервала $(-R, R)$), получим

$$f^{(n)}(x) = a_n n! + a_{n+1}(n+1)!x + \dots$$

При $x = 0$ найдем $f^{(n)}(0) = a_n n!$ и получаем формулу (6).

Таким образом, коэффициенты степенного ряда (1), в который может быть разложена функция $f(x)$, однозначно определяются формулой (6). *Утверждение доказано.*

Замечание. Условие $f(x) \in C^\infty(-R, R)$ является необходимым, но не является достаточным для того чтобы функцию $f(x)$ можно было разложить в степенной ряд на интервале $(-R, R)$. Существуют функции, имеющие на интервале непрерывные производные любого порядка, но не разложимые на этом интервале в степенной ряд. Примером такой функции может служить (пример Коши, 1823 г.)

$$f(x) = \begin{cases} e^{-\frac{1}{x^2}} & \text{при } x \neq 0, \\ 0 & \text{при } x = 0. \end{cases}$$

Приведем теперь критерий разложимости функции в степенной ряд.

Утверждение 2. *Для того чтобы функция $f(x)$ могла быть разложена в ряд Тейлора на интервале $(-R, R)$ (на множестве $\{x\}$), необходимо и достаточно, чтобы остаточный член в формуле Маклорена для этой функции стремился к нулю на указанном интервале (указанном множестве).*

4. Разложение некоторых элементарных функций в ряд Тейлора. В курсе Математический анализ I доказано, что остаточные члены в формуле Маклорена для функций e^x , $\cos x$ и $\sin x$ стремятся к нулю на всей числовой прямой, а остаточный член в формуле Маклорена для функции $\ln(1+x)$ стремится к нулю на полуинтервале $-1 < x \leq 1$.

В силу утверждения 2 из предыдущего пункта это приводит нас к следующим разложениям:

$$e^x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$
$$\cos x = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\sin x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!},$$

$$\ln(1+x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} x^n}{n}.$$

Первые три из этих разложений сходятся для всех значений x , а последнее – для значений x из полуинтервала $-1 < x \leq 1$.

Остановимся теперь на разложении в степенной ряд функции $(1+x)^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$, или на так называемом *биномиальном ряде*.

Положим $f(x) = (1+x)^\alpha$, тогда

$$f^{(n)}(x) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1)(1+x)^{\alpha-n}, \quad n \geq 1,$$

$$f^{(n)}(0) = \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n+1), \quad n \geq 1, \quad f(0) = 1$$

и ряд Тейлора для функции $f(x)$ имеет следующий вид (биномиальный ряд):

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k. \quad (7)$$

§6. Степенные ряды.

Выясним два вопроса: каков промежуток сходимости степенного ряда (7) и к чему этот ряд сходится.

Используя признак Даламбера, легко доказать, что биномиальный ряд (7) сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$ для любого $\alpha \in \mathbb{R}$. Действительно, обозначим

$$p_k = \frac{|\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)| \cdot |x|^k}{k!},$$

тогда

$$\frac{p_{k+1}}{p_k} = \frac{|\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k)| \cdot |x|^{k+1} \cdot k!}{(k+1)! \cdot |\alpha(\alpha - 1)(\alpha - 2) \dots (\alpha - k + 1)| |x|^k} = \frac{|\alpha - k|}{k+1} |x|,$$

а так как для любого числа $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{|k - \alpha|}{k+1} |x| = |x|,$$

то ряд (7) сходится абсолютно при $|x| < 1$ и расходится при $|x| > 1$.

§6. Степенные ряды.

Докажем, что для любого числа $x \in (-1, 1)$ и любого $\alpha \in \mathbb{R}$ ряд (7) сходится к $f(x)$. Оценим остаток в формуле Маклорена для функции $f(x)$ с остаточным членом в форме Коши

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^n \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k + R_{n+1}(x), \quad (8)$$

где

$$\begin{aligned} R_{n+1}(x) &= \frac{(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} f^{(n+1)}(\theta x) = \\ &= \frac{(1-\theta)^n}{n!} x^{n+1} \alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)(1+\theta x)^{\alpha-n-1} = \quad (9) \\ &= \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n \cdot \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n \cdot \alpha x (1+\theta x)^{\alpha-1} \equiv \\ &\equiv \varphi_{1n}(x, n) \cdot \varphi_{2n}(x, n) \cdot \varphi_{3n}(x, n), \end{aligned}$$

$\theta = \theta(n)$ – некоторое число из интервала $(0, 1)$,

$$\varphi_{1n}(x, n) = \left(\frac{1-\theta}{1+\theta x}\right)^n, \quad \varphi_{2n}(x, n) = \frac{(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-n)}{n!} x^n,$$

$$\varphi_{3n}(x, n) = \alpha x(1 + \theta x)^{\alpha-1}.$$

Все члены последовательности φ_{1n} не превосходят единицы: $0 < \varphi_{1n} < 1$, $\forall x \in (-1, 1)$, $\forall n \in \mathbb{N}$. Выражение $\varphi_{2n}(x, n)$ представляет собой общий член биномиального ряда, отвечающего показателю $\alpha - 1$. Так как при $|x| < 1$ биномиальный ряд сходится каков бы ни был показатель, то последовательность $\{\varphi_{2n}(x, n)\}$ является бесконечно малой для любого x из интервала $-1 < x < 1$. Наконец, величина $|\varphi_{3n}(x, n)|$ для всех номеров n заключена между числами $|\alpha x|(1 + |x|)^{\alpha-1}$ и $|\alpha x|(1 - |x|)^{\alpha-1}$ при любом фиксированном $\alpha \in \mathbb{R}$ и при любом $x \in (-1, 1)$.

Таким образом, в силу (9) остаточный член $R_{n+1}(x)$ стремится к нулю для любого фиксированного $\alpha \in \mathbb{R}$ и любого x из интервала $-1 < x < 1$.

Следовательно, в силу (8) для каждого $\alpha \in \mathbb{R}$ всюду на интервале $-1 < x < 1$ справедливо разложение

$$(1+x)^\alpha = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\alpha(\alpha-1)(\alpha-2)\dots(\alpha-k+1)}{k!} x^k.$$

§6. Степенные ряды.

Имеет смысл исключить $\alpha = 0$ и $\alpha \in \mathbb{N}$, так как при этом получаем известное *конечное* разложение по формуле бинома Ньютона.

5. Степенные ряды в комплексной области. Выше отмечалось, что на случай степенного ряда относительно комплексной переменной z

$$a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \dots + a_n z^n + \dots,$$

где a_n – вещественные или комплексные числа, переносятся теоремы 14 и 15 (о существовании и величине радиуса сходимости). Ряды такого типа используются для определения некоторых функций комплексной переменной z .

Функции e^z , $\cos z$ и $\sin z$ комплексной переменной z определяются как суммы следующих рядов:

$$e^z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{z^n}{n!}, \quad (10)$$

$$\cos z = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!}, \quad (11)$$

$$\sin z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!}. \quad (12)$$

Легко проверить, что эти ряды абсолютно сходятся для всех значений z (их радиусы сходимости $R = \infty$).

Установим теперь связь между функциями e^z , $\cos z$ и $\sin z$. Заменяя в формуле (10) z на iz , получим

$$\begin{aligned} e^{iz} &= 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \frac{(iz)^4}{4!} + \frac{(iz)^5}{5!} + \dots = \\ &= \left(1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \dots\right) + i\left(z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \dots\right) \end{aligned} \quad (13)$$

(теорема Коши позволяет переставлять члены ряда).

Сопоставляя правую часть равенства (13) с разложениями (11) и (12), придем к следующей замечательной формуле

$$e^{iz} = \cos z + i \sin z. \quad (14)$$

Формула (14) играет фундаментальную роль в теории функций комплексной переменной и называется *формулой Эйлера*.

§6. Степенные ряды.

Полагая в формуле Эйлера переменную z равной сначала вещественному числу x , а затем вещественному числу $-x$, получим следующие формулы

$$e^{ix} = \cos x + i \sin x, \quad e^{-ix} = \cos x - i \sin x.$$

Складывая и вычитая эти формулы, получим формулы, выражающие $\cos x$ и $\sin x$ через показательную функцию:

$$\cos x = \frac{e^{ix} + e^{-ix}}{2}, \quad \sin x = \frac{e^{ix} - e^{-ix}}{2i}.$$

В заключение остановимся на определении логарифмической функции $w = \ln z$ комплексной переменной z . Эту функцию естественно определить как функцию, обратную показательной, т. е. из соотношения $z = e^w$. Полагая $w = u + iv$, $z = x + iy$, поставим перед собой цель – выразить u и v через $z = x + iy$.

Из соотношения $z = x + iy = e^{u+iv} = e^u(\cos v + i \sin v)$ получим, используя понятия модуля и аргумента комплексного числа,

$$|z| = \sqrt{x^2 + y^2} = e^u, \quad \arg z = v - 2\pi k, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Из последних равенств находим, что

$$u = \ln |z| = \ln \sqrt{x^2 + y^2},$$

$$v = \arg z + 2\pi k \quad (k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots),$$

или окончательно

$$\operatorname{Ln} z = \ln |z| + i(\arg z + 2\pi k), \quad \text{где } k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (15)$$

Главным значением логарифмической функции называют

$$\ln z = \ln |z| + i \arg z.$$

Формула (15) показывает, что логарифмическая функция в комплексной области *не является однозначной*: ее мнимая часть для одного и того же значения z имеет бесчисленное множество значений, отвечающих различным $k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$

Легко понять, что аналогичная ситуация будет иметь место и при определении в комплексной области обратных тригонометрических функций.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Однократный определенный интеграл - задачи - вычисление площади криволинейной трапеции, вычисление массы неоднородного стержня по известной его линейной плотности.

Аналогичные "многомерные" задачи приводят к понятию двойного или тройного интеграла.

§1. Определение и существование двойного интеграла

1°. **Случай прямоугольного множества.** Пусть на плоскости задана система координат Oxy , т. $P = P(x, y)$. Пусть произвольная функция $f(P) = f(x, y)$, определена на прямоугольнике

$$R = \{(x, y) : x \in [a, b], y \in [c, d]\} \equiv [a, b] \times [c, d].$$

Разобьем прямоугольник R на np частичных прямоугольников R_{kl} : $R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$, $x_0 = a, x_n = b, y_0 = c, y_p = d$. Разбиение прямоугольника обозначим через T .

Всюду в этой главе под термином "прямоугольник" будем понимать прямоугольник со сторонами, параллельными координатным осям.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Длину диагонали прямоугольника R_{kl} : $d_{kl} = \sqrt{(\Delta x_k)^2 + (\Delta y_l)^2}$ назовём *диаметром* прямоугольника R_{kl} , $\Delta = \max_{k,l} d_{kl}$ – наз. *диаметром разбиения* T прямоуг-ка R .

На каждом частичном прямоугольнике R_{kl} выберем произвольную точку $P_{kl}(\xi_{kl}, \eta_{kl})$. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$. Обозначим через $\Delta R_{kl} = \Delta x_k \cdot \Delta y_l$ – площадь прям-ка R_{kl} .

Определение 1. Выражение (число) $\sigma(f) = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p f(P_{kl}) \Delta R_{kl}$ называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению T прям-ка R и данному выбору промежуточных точек P_{kl} на частичных прям-ках разбиения T .

Определение 2. Число I наз. *пределом интегральных сумм* $\sigma(f)$ при $\Delta \rightarrow 0$, если для любого положительного числа ε можно указать такое положительное число δ , что при $\Delta < \delta$: $|\sigma(f) - I| < \varepsilon$, независимо от выбора точек $P_{kl} \in R_{kl}$.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Определение 3. Функция $f(x, y)$ наз. *интегрируемой* (по Риману) на прямоугольнике R , если существует конечный предел I интегральных сумм $\sigma(f)$ этой функции при диаметре разбиения $\Delta \rightarrow 0$. Этот предел I называется *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по прямоугольнику R и обозначается одним из символов

$$I = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma(f) = \iint_R f(x, y) dx dy = \iint_R f(P) d\sigma,$$

$d\sigma$ – элемент площади, $d\sigma = dx \cdot dy$ (кратко: $I = \int_R f(P) d\sigma$).

Замечание. Точно так же, как и для однократного интеграла устанавливается, что любая интегрируемая на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ является ограниченной на нем.

Далее рассматриваем лишь *ограниченные функции*.

Теория Дарбу *, развитая для однократного интеграла, полностью переносится на случай двойного интеграла в прямоугольнике R . Введем только необходимые обозначения.

* Жан Гастон Дарбу – французский математик (1842 – 1917).

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Обозначим $M_{kl} = \sup_{R_{kl}} f(x, y)$, $m_{kl} = \inf_{R_{kl}} f(x, y)$. Составим

для данного разбиения T прямоугольника R две суммы:

верхнюю $S = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p M_{kl} \Delta R_{kl}$ и нижнюю $s = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{kl} \Delta R_{kl}$,

очевидно, что $s \leq \sigma(f) \leq S$.

Справедливы шесть утверждений из теории Дарбу, аналогичные доказанным для одномерного интеграла, их доказательства полностью аналогичны. Из этих утверждений вытекает следующая основная теорема.

Теорема 1. *Для того чтобы ограниченная на прямоугольнике R функция $f(x, y)$ была интегрируема на этом прямоугольнике, необходимо и достаточно, чтобы для любого положительного числа ε нашлось такое разбиение T прямоугольника R , для которого $S - s < \varepsilon$.*

Эта теорема в соединении с теоремой о равномерной непрерывности функций, позволяет выделить основные классы интегрируемых функций.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Теорема 2. Любая непрерывная в прямоуг-ке R функция $f(x, y)$ интегрируема на этом прямоугольнике.

Доказательство. Функция $f(x, y)$ равномерно непрерывна на R , поэтому $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta < \delta, \omega_{kl}(f) < \frac{\varepsilon}{\Delta R}$, где $\omega_{kl} = M_{kl} - m_{kl}$ – колебание функции f на прям-ке R_{kl} . Но тогда

$$S - s = \sum_k \sum_l (M_{kl} - m_{kl}) \Delta R_{kl} < \frac{\varepsilon}{\Delta R} \sum_k \sum_l \Delta R_{kl} = \frac{\varepsilon}{\Delta R} \cdot \Delta R = \varepsilon.$$

Функция f ограничена на R , поэтому из теоремы 1 следует, что она интегрируема по прямоугольнику R . Теорема доказана.

Определение 4. Назовём *элементарной фигурой* на плоскости множество точек (на плоскости), представляющих собой объединение конечного числа прямоугольников (со сторонами $\parallel$ осям Ox, Oy).

При этом прямоугольники, составляющие элем. фигуру, могут иметь общие внутренние точки. Обозначение: Q .

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Определение 5. Говорят, что функция $f(x, y)$ обладает в прям-ке R (на замкнутом множестве D) *I-свойством*, если
1) $f(x, y)$ ограничена на $R(D)$; 2) $\forall \varepsilon > 0 \exists Q$, элементарная фигура, содержащая все точки и линии разрыва функции f и имеющая площадь $\Delta Q < \varepsilon$.

Теорема 3. Если функция $f(x, y)$ обладает *I-свойством* в прямоугольнике R , то она интегрируема на этом прямоуг-ке.

Доказательство аналогично доказательству теоремы для однократных интегралов.

2°. Случай произвольной области. В первой части курса были введены понятия квадратуемости и площади плоской фигуры. Плоская фигура – часть плоскости, ограниченная простой замкнутой кривой. Плоская фигура наз. квадратуемой, если её верхняя площадь совпадает с её нижней площадью, это число наз. её площадью.

Эти понятия без каких-либо изменений переносятся на случай произвольного ограниченного замкнутого множества D точек плоскости.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Во всех определениях и утверждениях соответствующих параграфов первой части курса вместо плоской фигуры можно рассматривать произвольное ограниченное замкнутое мн-во точек на плоскости.

Там же была определена кривая (или граница фигуры) площади нуль: Γ называется кривой площади нуль, если $\forall \varepsilon > 0$ найдётся многоугольник, содержащий все точки Γ и имеющий площадь, меньшую ε .

В этом определении термин "многоугольник" можно заменить термином "элементарная фигура". Это следует из того, что любая элементарная фигура является многоугольником, а любой многоуг-к с площадью $< \varepsilon$, содержится в элементарной фигуре, имеющей площадь, меньшую числа 32ε (см. лемму первой части курса о критерии квадратуемости плоской фигуры).

Определим двойной интеграл для произвольного двумерного множества D . Пусть D – ограниченное замкнутое множество, граница Γ которого имеет площадь нуль, а функция $f(x, y)$ – произвольная функция, определённая и ограниченная в D .

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Обозначим через R – произвольный прям-к (со сторонами, || осям), содержащий D . Зафиксируем такой прямоугольник. Введём функцию $F(x, y) = f(x, y)$ в D и $= 0$ в $R \setminus D$.

Определение 6. Функцию $f(x, y)$ назовём *интегрируемой (по Риману) на множестве D* , если функция $F(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике R . При этом число $I = \iint_R F(x, y) dx dy$ назовём *двойным интегралом* от функции $f(x, y)$ по множеству D и обозначим символом

$$I = \iint_D f(x, y) dx dy = \iint_D f(M) d\sigma \equiv \int_D f(M) d\sigma.$$

Из теоремы 3 и определения двойного интеграла следует следующий результат.

Теорема 4. Если функция $f(x, y)$ обладает на ограниченном замкнутом квадратуемом множестве D I -свойством, то она интегрируема на множестве D .

Доказательство. Для такой функции f функция F обладает I -свойством в прямоугольнике R :

§1. Определение и существование двойного интеграла.

F – ограничена в R и все точки и линии разрыва либо совпадают с разрывами функции f , либо лежат на границе Γ множества D . Так как Γ имеет площадь нуль, то утверждение теоремы следует из теоремы 3, F – интегрируема, следовательно и f интегрируема. Теорема доказана.

Утверждение. $\iint_D 1 dx dy = \Delta D$ (площадь D).

Доказательство. Функция $f(x, y) \equiv 1$ обладает I -свойством в D (соответственно F – в R), $\Rightarrow \exists I = \iint_D 1 dx dy$. Подвергая

прямоугольник R всё более мелким разбиениям, получим, что верхние суммы этих разбиений будут = площадям элементарных фигур, содержащих D , а нижние суммы – площадям элементарных фигур, содержащихся в D . А $S, s \rightarrow \Delta D, \Delta \rightarrow 0$, и $S, s \rightarrow I, \Delta \rightarrow 0$. Утверждение доказано.

Возникает вопрос: зависит ли факт существования двойного интеграла и его величина I 1) от выбора на плоскости координатных осей Ox, Oy и 2) от выбора прямоугольника R , на котором определяем функцию $F(x, y)$.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Дадим другое определение интегрируемости функции f и двойного интеграла, не зависящее ни от выбора координат, ни от выбора прямоугольника R и докажем эквивалентность этих определений.

3°. **Общее определение двойного интеграла.** Пусть D – ограниченное замкнутое множество на плоскости Oxy , имеющее границу Γ площади нуль. Разобьём D конечным числом кривых площади нуль на конечное число (не обязательно связных) замкнутых частичных множеств $D_1, D_2, \dots, D_r$ без общих внутренних точек. Получим разбиение $\tilde{T}$ множества D .

Каждое множество D_i квадратуемо, так как границы их ∂D_i имеют площадь нуль; обозначим через ΔD_i площадь множества D_i . Назовём *диаметром* множества D_i – $\sup$ расстояний между любыми двумя точками множества, $d_i = \sup_{M, N \in D_i} \varrho(M, N)$. Обозначим $\tilde{\Delta}$ – диаметр разбиения $\tilde{T}$ множества D : $\tilde{\Delta} = \max d_i, 1 \leq i \leq r$.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

В каждом D_i выберем $\forall$ т. $P_i(\xi_i, \eta_i)$.

Определение 7. Выражение $\tilde{\sigma}(f) = \sum_{i=1}^r f(P_i) \Delta D_i$

называется *интегральной суммой* функции $f(x, y)$, соответствующей данному разбиению $\tilde{T}$ множества D на частичные множества D_i и данному выбору промежуточных точек P_i в частичных множествах.

Определение 8. Число I называется *пределом интегральных сумм* $\tilde{\sigma}(f)$ при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что при $\tilde{\Delta} < \delta$, независимо от выбора точек P_i в частичных множествах D_i , выполняется неравенство $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.

Определение 9 (Общее определение интегрируемости). Функция $f(x, y)$ называется *интегрируемой (по Риману)* на множестве D , если $\exists$ конечный предел I интегральных сумм $\tilde{\sigma}$ этой функции при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$. Указанный предел I называется *двойным интегралом от функции $f(x, y)$ по множеству D* ;
$$I = \iint_D f(x, y) dx dy.$$

Теорема 5. *Общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в 2° (частному) определению.*

Доказательство. I. Из второго (общего) определения следует первое.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Теорема 5. *Общее определение интегрируемости эквивалентно определению, данному в 2^0 (частному) определению.*

Доказательство. Утверждение I. Из второго (общего) определения следует первое. Докажем это. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема по второму определению. Это означает, что $\forall \tilde{T}, \forall \{D_i\} \subset D, \forall P_i \in D_i \exists \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \tilde{\sigma}(f) = I$.

Заклучим множество D в прямоугольник R , введем функцию $F(x, y)$ и разобьем R на прямоугольники R_{kl} . Получим разбиение T прямоугольника R , диаметр разбиения Δ . Зафиксируем произвольную точку $P_{kl}(\xi_{kl}, \eta_{kl}) \in R_{kl}$, рассмотрим интегральную сумму $\sigma(F)$ для функции F . Обозначим $\sigma_F \equiv \sigma(F)$ и $\tilde{\sigma}_f \equiv \tilde{\sigma}(f)$.

Докажем, что $\sigma_F \rightarrow I$ при $\Delta \rightarrow 0$ ($\forall P_{kl}, \forall T$). Построим разбиение $\tilde{T}$ и интегральную сумму $\tilde{\sigma}_f$, отвечающие этому разбиению.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Если $R_{kl} \subset D \setminus \Gamma$, т.е. $R_{kl} \Subset D$, то $D_i = R_{kl}$, т. $P_i = P_{kl}$ (здесь $R_{kl} \cap D = R_{kl}$).

Если $R_{kl} \cap \Gamma \neq \emptyset$, то $D_i = R_{kl} \cap D$, т. P_i – любая точка в D_i . Таким образом, построено разбиение $\tilde{T}$ и интегральная сумма $\tilde{\sigma}_f$. Диаметр разбиения $\tilde{T}$: $\tilde{\Delta} \leq \Delta$, поэтому при $\Delta \rightarrow 0$, и $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$.

Обозначим $M_0 = \sup_D |f(x, y)|$. Тогда, так как $\Delta\Gamma = 0$, то $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: при $\Delta < \delta$ справедливы оценки

$$|\sigma_F - \tilde{\sigma}_f| \leq 2M_0 \sum_{k,l, R_{kl} \cap \Gamma \neq \emptyset} \Delta R_{kl} < \varepsilon.$$

Следовательно, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} (\sigma_F - \tilde{\sigma}_f) = 0$. Но так как $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_f = I$, то $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_F = I$. Утверждение I доказано.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Утверждение II. Из первого определения следует второе (общее). Докажем, что если f интегрируема в D по первому определению, I – двойной интеграл от f по D , то для f
 $\exists \lim_{\tilde{\Delta} \rightarrow 0} \tilde{\sigma}_f = I$ (для любого разбиения $\tilde{T}$ множества D).

Пусть $D = \cup_{i=1}^r D_i$, D_i – без общих внутренних точек. Разбиение $\tilde{T}$, диаметр разбиения $\tilde{\Delta}$. Обозначим $\tilde{M}_i = \sup_{D_i} f(x, y)$, $\tilde{m}_i = \inf_{D_i} f(x, y)$, $D_i \subset D$. Рассмотрим

верхнюю и нижнюю суммы $\tilde{S} = \sum_{i=1}^r \tilde{M}_i \Delta D_i$, $\tilde{s} = \sum_{i=1}^r \tilde{m}_i \Delta D_i$.

Так как для любого разбиения справедливо

$$\tilde{s} \leq \tilde{\sigma}_f \leq \tilde{S},$$

то достаточно доказать, что $\tilde{S} \rightarrow I$ при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$ и $\tilde{s} \rightarrow I$ при $\tilde{\Delta} \rightarrow 0$.

Докажем, что $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \tilde{\Delta} < \delta \Rightarrow |\tilde{S} - I| < \varepsilon$ и $|\tilde{s} - I| < \varepsilon$.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Заключение D в прямоугольник R , $D \subset R$, рассмотрим функцию $F(x, y) = f(x, y)$ в D и 0 в $R \setminus D$.

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Найдется разбиение T прямоугольника R на частичные прямоугольники $R_k, k = 1, 2, \dots, l$, такое, что выполняются две оценки

$$1) S - s < \frac{\varepsilon}{2}; \quad (S = S_F, s = s_F)$$

$$2) \sum_{k, R_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \Delta R_k < \frac{\varepsilon}{12M_0}, \quad M_0 = \sup_D |f(x, y)|;$$

Почему 1), 2) возможны?

Обозначим множество линий разбиения T через Γ_T .

Заклучим все отрезки прямых из Γ_T СТРОГО внутрь элементарной фигуры Q , площадь которой $\Delta Q < \frac{\varepsilon}{12M_0}$. Тогда заведомо существует точная нижняя грань

$$\delta = \inf_{M \in \partial Q, N \in \Gamma_T} \varrho(M, N) > 0 \text{ расстояний между точками}$$

границы элементарной фигуры Q и линиями разбиения Γ_T .

Разобьем D на $\{D_i\}_{i=1}^r$ (без общих внутренних точек) так, что $\tilde{\Delta} < \delta$. Докажем, что для любого такого разбиения $\tilde{T}$ множества D

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{4} \quad (1), \quad \tilde{s} > s - \frac{\varepsilon}{4} \quad (2)$$

§1. Определение и существование двойного интеграла.

Т.е. $s - \frac{\varepsilon}{4} < \tilde{s} \leq \tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{4}$ и т.к. $s, S \rightarrow I, \Delta \rightarrow 0$, то и $\tilde{s}, \tilde{S} \rightarrow I, \tilde{\Delta} \rightarrow 0$ ($\tilde{\Delta} \leq \Delta$) и теорема будет доказана.

Докажем (1), (2) доказываем аналогично. Рассмотрим верхнюю сумму $\tilde{S} = \sum_{i=1}^r \tilde{M}_i \Delta D_i$. Удалим из нее все слагаемые, отвечающие множествам D_i , пересекающимся с Γ_T : $D_i \cap \Gamma_T \neq \emptyset$. Обозначим оставшуюся сумму через $\sum_i' \tilde{M}_i \Delta D_i$, здесь все $D_i \in R_k$.

Погрешность этой операции:

$$|\tilde{S} - \sum_i' \tilde{M}_i \Delta D_i| \leq M_0 \sum_{i, D_i \cap \Gamma_T \neq \emptyset} \Delta D_i \leq M_0 \Delta Q < M_0 \frac{\varepsilon}{12M_0} = \frac{\varepsilon}{12}$$

(т.к. $\tilde{\Delta} < \delta$, то из того, что $D_i \cap \Gamma_T \neq \emptyset$, следует, что $D_i \in Q$ и $\sum_{i, D_i \cap \Gamma_T \neq \emptyset} \Delta D_i \leq \Delta Q$). Таким образом, получаем

$$\tilde{S} < \sum_i' \tilde{M}_i \Delta D_i + \frac{\varepsilon}{12}$$

§1. Определение и существование двойного интеграла.

(аналогично получаем $\tilde{s} > \sum_i' \tilde{m}_i \Delta D_i - \frac{\varepsilon}{12}$).

Рассмотрим $\forall R_k$ – прямоугольник разбиения T , $R_k \cap D \neq \emptyset$, и все множества $D_i \subset R_k$ из суммы $\sum_i'$. Обозначим

$\cup_{D_i \in R_k} D_i = \tilde{R}_k$ и заменим для этих i $\tilde{M}_i$ на $M_k = \sup_{R_k} F(x, y)$,

$\tilde{M}_i \leq M_k$, а $\sum_{D_i \in R_k} \Delta D_i = \Delta \tilde{R}_k$. Получаем

$$\tilde{S} < \sum_i' M_k \Delta D_i + \frac{\varepsilon}{12} = \sum_{k, R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta \tilde{R}_k + \frac{\varepsilon}{12}. \quad (3)$$

Сравним сумму в правой части последнего равенства в (3) и сумму $S = \sum_{k=1}^l M_k \Delta R_k = \sum_{R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta R_k$:

$$\left| \sum_{R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta R_k - \sum_{k, R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta \tilde{R}_k \right| = \left| \sum_{R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta (R_k \setminus \tilde{R}_k) \right| \leq$$

§1. Определение и существование двойного интеграла.

$$\begin{aligned} &\leq M_0 \sum_{R_k \cap D \neq \emptyset} \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) = M_0 \left(\sum_{R_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) + \sum_{R_k \in D} \Delta(R_k \setminus \tilde{R}_k) \right) \leq \\ &\leq M_0 \left(\sum_{R_k \cap \Gamma \neq \emptyset} \Delta R_k + \Delta Q \right) \leq M_0 \left(\frac{\varepsilon}{12M_0} + \frac{\varepsilon}{12M_0} \right) = \frac{\varepsilon}{6}. \end{aligned}$$

Таким образом,

$$\left| S - \sum_{k, R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta \tilde{R}_k \right| < \frac{\varepsilon}{6},$$

Т.е. $\sum_{k, R_k \cap D \neq \emptyset} M_k \Delta \tilde{R}_k < S + \frac{\varepsilon}{6}$, подставим полученную оценку в (3), получаем

$$\tilde{S} < S + \frac{\varepsilon}{6} + \frac{\varepsilon}{12} = S + \frac{\varepsilon}{4},$$

Т.е. получили неравенство (1).

§2. Основные свойства двойного интеграла.

Так как в силу условия 1) на разбиение T S и s отклоняются от I меньше, чем на $\frac{\varepsilon}{2}$, то $\tilde{S}$ и $\tilde{s}$ отклоняются от I меньше, чем на ε . Следовательно, $|\tilde{\sigma} - I| < \varepsilon$.

Утверждение II доказано. Теорема доказана.

§2. Основные свойства двойного интеграла.

Свойства и их вывод для двойного интеграла аналогичны тому, что было для однократного интеграла. Поэтому ограничимся формулировками свойств.

Пусть D ограниченное замкнутое квадратуемое множество на плоскости Oxy , а функции f, g интегрируемы на множестве D .

Свойство 1. Аддитивность. Если D при помощи кривой γ площади нуль разбивается на два связных и не имеющих общих внутренних точек множества D' и D'' , то функция $f(x, y)$ интегрируема в каждом из множеств D', D'' , причем

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \iint_{D'} f(x, y) dx dy + \iint_{D''} f(x, y) dx dy.$$

Верно и обратное – из существования правой части следует существование левой части и их равенство между собой.

§2. Основные свойства двойного интеграла.

Свойство 2. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $(\alpha f + \beta g)(x, y)$ интегрируема на D и справедливо равенство

$$\iint_D (\alpha f + \beta g)(x, y) dx dy = \alpha \iint_D f(x, y) dx dy + \beta \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Свойство 3. Функция $f(x, y) \cdot g(x, y)$ интегрируема на D .

Свойство 4. Если всюду в D справедливо неравенство $f(x, y) \leq g(x, y)$, то

$$\iint_D f(x, y) dx dy \leq \iint_D g(x, y) dx dy.$$

Свойство 5. Функция $|f(x, y)|$ интегрируема в D и

$$\left| \iint_D f(x, y) dx dy \right| \leq \iint_D |f(x, y)| dx dy.$$

Обратное утверждение неверно.

Свойство 6. Теорема о среднем значении. Если функция $g(x, y)$ неотрицательна (неположительна) всюду в D , M, m – точные грани f в D , то $\exists \mu \in [m, M]$, что

$$\iint_D f(x, y)g(x, y) dx dy = \mu \iint_D g(x, y) dx dy.$$

В частности, если функция f непрерывна в D , а D – связное множество, то в $D \exists (\xi, \eta)$, что $\mu = f(\xi, \eta)$.

Свойство 7. $\iint_D 1 dx dy = \Delta D$ – площади D .

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§3. Вычисление двойных интегралов.

1° Случай прямоугольника.

Теорема 6. Пусть функция $f(x, y)$ интегрируема в прямоугольнике $R = [a, b] \times [c, d]$, т.е. $\exists$ двойной интеграл $\iint_R f(x, y) dx dy$. Пусть для каждого $x \in [a, b]$ $\exists$ однократный

интеграл $I(x) = \int_c^d f(x, y) dy$. Тогда существует повторный

интеграл $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$ и справедливо равенство

$$\iint_R f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy. \quad (1)$$

Замечание. Для выполнения обоих условий теоремы достаточно, чтобы функций $f(x, y)$ была непрерывной на R .

§3. Вычисление двойных интегралов.

Доказательство. Разобьем R на np частичных прямоугольников: $a = x_0 < x_1 < \dots < x_n = b$, $c = y_0 < y_1 < \dots < y_p = d$, $R_{kl} = [x_{k-1}, x_k] \times [y_{l-1}, y_l]$, $k = \overline{1, n}, l = \overline{1, p}$, Δ – диаметр разбиения. Пусть $\Delta x_k = x_k - x_{k-1}$, $\Delta y_l = y_l - y_{l-1}$. Функция $f(x, y)$ – интегрируемая, следовательно ограниченная на R . Обозначим M_{kl}, m_{kl} – точные грани функции $f(x, y)$ на прямоугольнике R_{kl} . Тогда всюду на R_{kl} :

$$m_{kl} \leq f(x, y) \leq M_{kl}. \quad (2)$$

Положим в (2) $x = \xi_k, \xi_k$ – произвольно зафиксированная точка на $[x_{k-1}, x_k]$. Проинтегрируем (2) по y в пределах от y_{l-1} до y_l , получаем

$$m_{kl} \Delta y_l \leq \int_{y_{l-1}}^{y_l} f(\xi_k, y) dy \leq M_{kl} \Delta y_l,$$

просуммируем по всем l от 1 до p и используем обозн. $I(x)$:

§3. Вычисление двойных интегралов.

$$\sum_{l=1}^p m_{kl} \Delta y_l \leq I(\xi_k) \leq \sum_{l=1}^p M_{kl} \Delta y_l.$$

Умножим неравенства на Δx_k и просуммируем по k от 1 до n :

$$s = \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p m_{kl} \Delta x_k \Delta y_l \leq \sum_{k=1}^n I(\xi_k) \Delta x_k \leq \sum_{k=1}^n \sum_{l=1}^p M_{kl} \Delta x_k \Delta y_l = S. \quad (3)$$

Пусть $\Delta \rightarrow 0$, тогда наибольший из $\Delta x_k \rightarrow 0$, $\Delta y_l \rightarrow 0$.
Левая и правая части в (3) $(s, S) \rightarrow \iint_R f(x, y) dx dy$,

следовательно, $\exists \lim_{\Delta x_k \rightarrow 0}$ среднего члена в (3), равный тому же интегралу. Но этот предел, по определению однократного интеграла, равен $\int_a^b I(x) dx = \int_a^b dx \int_c^d f(x, y) dy$.

Тем самым, доказано существование повторного интеграла и справедливость равенства (1). *Теорема доказана.*

Замечание. Если x и y поменять местами, то теорема, очевидно, тоже верна (вместо интеграла $I(x)$ рассматриваем интеграл $K(y) = \int_a^b f(x, y)dx$). Теорема 6*....

2°. **Случай произвольного множества.**

Теорема 7. Пусть выполняются следующие условия:

1) множество D – ограниченное связное замкнутое квадратируемое и таково, что любая прямая $x = x_0$, параллельная оси Oy , пересекает границу Γ этого множества не более, чем в двух точках, ординаты которых $y_1(x_0) \leq y_2(x_0)$, либо по целому отрезку $[y_1(x_0), y_2(x_0)]$; 2) функция $f(x, y)$ определена и интегрируема на множестве D и для каждого $x \in [x_1, x_2]$ – проекции D на Ox , – существует однократный

интеграл $I(x) = \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$. Тогда существует повторный

интеграл $\int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y)dy$ и верно равенство:

§3. Вычисление двойных интегралов.

$$\iint_D f(x, y) dx dy = \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \quad (4)$$

Доказательство. Обозначим через $R = [a, b] \times [c, d]$ прямоугольник, содержащий D , $F(x, y) = f(x, y)$ на D , $= 0$ на $R \setminus D$. Для функции $F(x, y)$ выполнены все условия теоремы 6 в прямоугольнике R . Следовательно, верна формула (1), которая переходит в формулу (4) теоремы 7.

$$\begin{aligned} \iint_R F(x, y) dx dy &= \iint_D f(x, y) dx dy = \int_a^b dx \int_c^d F(x, y) dy = \\ &= \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} f(x, y) dy. \end{aligned}$$

Теорема доказана.

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Замечания. 1. Переменные x и y можно поменять местами с соответствующими изменениями условий на D и f .

2. Множество D может быть таким, что его можно разбить на конечное число частей D_i , для каждой из которых справедливы условия теоремы 6 или 7. Тогда в правых частях формул (1), (4) получим суммы интегралов.

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Теория двойного интеграла без осложнений переносится на случай n -кратного интеграла, $n \geq 3$. Ограничимся введением новой терминологии.

Пространство E^n , $n \geq 3$, декартова прямоугольная система координат $Ox_1x_2 \dots x_n$. Рассмотрим n -мерный прямоугольный параллелепипед (брус)

$$R_n = \{(x_1, \dots, x_n) : a_i \leq x_i \leq b_i, i = \overline{1, n}\} = \prod_{i=1}^n [a_i, b_i].$$

Считаем по определению, что n -мерный объем бруса равен произведению длин всех его ребер, выходящих из одной его

вершины:
$$V_n(R_n) = \prod_{i=1}^n (b_i - a_i).$$

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Назовем *элементарным телом*, обозн. Q_n , множество точек E^n , представляющее объединение конечного числа n -мерных прямоугольных параллелепипедов, не имеющих общих внутренних точек и имеющих ребра, параллельные осям координат. Объем любого элементарного тела известен и равен сумме объемов составляющих его параллелепипедов, $V_n(Q_n)$.

Пусть $D = D_n$ – любое ограниченное замкнутое множество в n -мерном евклидовом пространстве E^n (тело D). Назовем нижним объемом множества D число $\underline{V}_n = \sup_{\forall Q_n \subset D} V_n(Q_n)$ –

точную верхнюю грань объемов всех содержащихся в D элементарных тел, а верхним объемом множества D – число $\overline{V}_n = \inf_{\forall Q_n \supset D} V_n(Q_n)$ – точную нижнюю грань объемов всех

элементарных тел, содержащих D , $\underline{V}_n \leq \overline{V}_n$. Множество называется кубируемым, если $\underline{V}_n = \overline{V}_n$. Число $V_n = \underline{V}_n = \overline{V}_n$ называется n -мерным объемом множества D .

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Аналогично плоскому случаю доказывается утверждение

Утверждение 1. *Для того чтобы n -мерное множество D было кубируемым, необходимо и достаточно, чтобы для любого $\varepsilon > 0$ нашлись два элементарных тела P_1, P_2 , таких, что $P_1 \subset D \subset P_2$, разность n -мерных объемов которых по модулю меньше ε .*

Поверхностью (или многообразием) n -мерного объема нуль назовем замкнутое множество, все точки которого принадлежат элементарному телу как угодно малого n -мерного объема (при этом поверхность может иметь $(n - 1)$ -мерный или $(n - k)$ -мерный, $k < n$, ненулевой объем, напр. сфера S в E^3 : $V_3(S) = 0$, $V_2(S) = 4\pi R^2 > 0$, $V_1(S)$ не определен).

Очевидно, n -мерное множество D кубируемо тогда и только тогда, когда граница этого множества представляет собой многообразие n -мерного объема нуль.

Далее повторяется схема построения n -кратного интеграла, аналогичная схеме, изложенной для двукратного интеграла.

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Сначала n -кратный интеграл от функции n переменных $f(x) = f(x_1, x_2, \dots, x_n)$ определяется в n -мерном прямоугольном параллелепипеде R_n , разбиваем каждое ребро, ... n -кратным интегралом от функции $f(x)$ по брусу R_n называется предел интегральных сумм при стремлении диаметра разбиения к нулю. Устанавливается критерий интегрируемости через верхние и нижние суммы.

Определим n -кратный интеграл от f по произвольному замкнутому ограниченному n -мерному множеству D , граница которого имеет n -мерный объем нуль. Этот интеграл определяется как интеграл по содержащему множество D n -мерному прямоугольному параллелепипеду R_n от функции $F = f$ в D , $= 0$ в $R_n \setminus D$.

$$\int_D f(x) dx = \iiint \dots \int_D f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 \dots dx_n.$$

$dv = dx = dx_1 dx_2 \dots dx_n$ — это произведение называется элементом объема в E^n .

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

Как и для $n = 2$ доказывается интегрируемость по $D \subset E^n$ функции f , обладающей I -свойством (т.е. ограниченная в D функция, все точки разрыва которой есть множество n -мерного объема нуль – принадлежат элементарному телу как угодно малого n -мерного объема). Изменение ограниченной функции на множестве n -мерного объема нуль не изменяет величины интеграла от этой функции.

Для определения n -кратного интеграла можно использовать разбиение множества D при помощи конечного числа произвольных многообразий n -мерного объема нуль на конечное число частичных множеств произвольной формы. В полной аналогии с теоремой 5 доказывается, что такое определение n -кратного интеграла эквивалентно указанному выше определению.

В полной аналогии с теоремами 6, 7 устанавливается формула повторного интегрирования для n -кратного интеграла.

Утверждение 2. Пусть n -мерное связное ограниченное замкнутое кубируемое множество D_n обладает тем свойством, что любая прямая, параллельная оси Ox_1 , пересекает его границу не более, чем в двух точках, проекции которых на ось Ox_1 есть $a(x_2, x_3, \dots, x_n) \leq b(x_2, x_3, \dots, x_n)$ (либо по отрезку $[a, b]$). Пусть функция $f(x_1, \dots, x_n)$ интегрируема в D_n и пусть для любой точки $(x_2, \dots, x_n) \in D_{n-1}$ – проекции D_n на гиперплоскость $Ox_2 \dots x_n$, существует однократный интеграл $\int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)}$

$f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$. Тогда существует $(n-1)$ -кратный интеграл

$$\iint \dots \int_{D_{n-1}} dx_2 dx_3 \dots dx_n \int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1$$

и справедлива формула

§4. Тройные и n -кратные интегралы.

$$\begin{aligned} \iint \dots \int_{D_n} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1 dx_2 dx_3 \dots dx_n = \\ = \iint \dots \int_{D_{n-1}} dx_2 dx_3 \dots dx_n \int_{a(x_2, \dots, x_n)}^{b(x_2, \dots, x_n)} f(x_1, x_2, \dots, x_n) dx_1. \end{aligned}$$

В этом утверждении вместо x_1 может выступать любая из переменных $x_2, \dots, x_n$.

Будем называть множество D *простым*, если любая прямая, параллельная какой-либо координатной оси, либо пересекает его границу не более, чем в двух точках, либо имеет на этой границе целый отрезок.

Для простого множества формулу повторного интегрирования можно применять по каждой из переменных $x_1, \dots, x_n$ (пример – n -мерный прямоугольный параллелепипед, ребра которого не обязательно параллельны осям координат).

Для n -кратного интеграла справедливы те же 7 свойств, что и для случая $n = 2$. В частности,

$$\iint \dots \int_{D_n} 1 dx_1 \dots, x_n = V_n(D_n) - n\text{-мерный объем мн-ва } D_n.$$

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§5. Замена переменных в n -кратном интеграле.

Полезная формула в случае $n = 1$:

$$y = \varphi(x), \quad \exists \varphi'(x), \quad \Rightarrow \int f(y) dy = \int f(\varphi(x)) \varphi'(x) dx.$$

Приведем аналог этой формулы для случая $\forall n > 1$.

Пусть функция $f(y_1, y_2, \dots, y_n)$ интегрируема на ограниченном замкнутом кубическом множестве D , $\exists \int_D f(y) dy$.

Пусть от переменных $y_1, y_2, \dots, y_n$ мы переходим к новым переменным $x_1, x_2, \dots, x_n$, т. е. совершаем преобразование

$$\begin{aligned} y_1 &= \psi_1(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ y_2 &= \psi_2(x_1, x_2, \dots, x_n) \\ &\vdots \\ y_n &= \psi_n(x_1, x_2, \dots, x_n) \end{aligned} \tag{1}$$

Кратко преобразование (1) обозначим $y = \psi(x)$, понимая под x и y точки из E^n , ψ – совокупность n функций $\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_n$.

§5. Замена переменных в n -кратном интеграле.

Обозначим D' – то множество в пространстве переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, которое при преобразовании (1) переходит в D , т.е. положим, что $D = \psi(D')$. При этом предположим, что преобразование (1) допускает обратное и что $D' = \psi^{-1}(D)$.

Пусть функции (1) имеют в D' непрерывные частные производные первого порядка по всем переменным, матрица Якоби имеет вид $J_\psi = \left\{ \frac{\partial y_i}{\partial x_j} \right\} = \left\{ \frac{\partial \psi_i}{\partial x_j} \right\}_{i,j=1}^n$, и якобиан

$$\det J_\psi = \frac{D(y)}{D(x)} = \frac{D(y_1, y_2, \dots, y_n)}{D(x_1, x_2, \dots, x_n)} = \begin{vmatrix} \frac{\partial y_1}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_1}{\partial x_n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \frac{\partial y_n}{\partial x_1} & \dots & \frac{\partial y_n}{\partial x_n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля в D' .

Тогда для интеграла справедлива следующая *формула замены переменных*:

$$\int_D f(y) dy = \int_{D'} f[\psi(x)] \left| \frac{D(y)}{D(x)} \right| dx;$$

или подробно:

§5. Замена переменных в n -кратном интеграле.

$$\iint \dots \int_D f(y_1, y_2, \dots, y_n) dy_1 \dots dy_n = \iint \dots \int_{D'} f[\psi_1(x_1, \dots, x_n), \dots, \psi_n(x_1, \dots, x_n)] \left| \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n.$$

Замечания. 1. При перечисленных условиях уравнения (1) можно разрешить относительно $x_1, \dots, x_n$, полученное преобразование $x = \psi^{-1}(y)$ будет иметь в D непрерывные частные производные первого порядка и отличный от нуля якобиан $\frac{D(x)}{D(y)}$.

2. Условие $\det J(x) \neq 0$ можно убрать. Формула остается верной.

Вычисление объемов n -мерных тел.

Так как интеграл

$$\iint \dots \int_D 1 dy_1 \dots dy_n \tag{2}$$

равен n -мерному объему $V_n(D)$ множества D , то величину $dv = dy_1 \dots dy_n$ естественно называть элементом объема в рассматриваемой декартовой системе координат $Oy_1y_2 \dots y_n$.

§5. Замена переменных в n -кратном интеграле.

С помощью преобразования $y = \psi(x)$ переходим от декартовых координат $y_1, y_2, \dots, y_n$ к новым, вообще говоря, криволинейным координатам $x_1, x_2, \dots, x_n$. Так как при таком переходе (согласно формуле замены переменных) интеграл (2) преобразуется в

$$I = \iint \dots \int_{D'} \left| \frac{D(y_1, \dots, y_n)}{D(x_1, \dots, x_n)} \right| dx_1 \dots dx_n = V_n(D),$$

то величину $|det J_\psi| dx_1 \dots dx_n$ естественно назвать *элементом объема* в криволинейной системе координат $Ox_1 \dots x_n$, $dv = |det J_\psi| dx_1 \dots dx_n$, т.е. модуль якобиана характеризует "растяжение" ("сжатие") объема при переходе от y к x .

Подсчитаем элементы объема в сферических и цилиндрических координатах в пространстве E^3 .

1°. Цилиндрические координаты. Система координат $Oxyz$, точка $\forall M(x, y, z)$, переходим к координатам $M(r, \varphi, z)$, где $r = |\overline{OM'}| \geq 0$, M' – проекция точки M на плоскость Oxy , $\varphi = (\widehat{Ox, \overline{OM'}}) \in [0, 2\pi)$, $z \in R$.

Преобразование (1) - переход от старых переменных к новым:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi, \\ y = r \sin \varphi, \\ z = z. \end{cases}$$

Якобиан этого преобразования:

$$\det J_{\psi} = \begin{vmatrix} \cos \varphi & -r \sin \varphi & 0 \\ \sin \varphi & r \cos \varphi & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r.$$

Таким образом, элемент объема равен $dv = r dr d\varphi dz$.

В частности, в полярной системе координат ($z = 0$):
 $dv = r dr d\varphi$.

2°. **Сферические координаты.** I. Система координат $Oxyz$, точка $\forall M(x, y, z)$, переходим к координатам $M(r, \varphi, \psi)$, где $r = |\overline{OM}| \geq 0$, $\varphi = \widehat{Ox, \overline{OM}'}$ $\in [0, 2\pi)$, M' – проекция точки M на плоскость Oxy , $\psi = \widehat{\overline{OM}', \overline{OM}} \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$.

Преобразование (1) - переход от старых переменных к новым:

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \cos \psi, \\ y = r \sin \varphi \cos \psi, \\ z = r \sin \psi. \end{cases}$$

Якобиан этого преобразования (проверьте!):

$\det J_\psi = r^2 \cos \psi \geq 0$. Следовательно, элемент объема равен $dv = r^2 \cos \psi \, dr \, d\varphi \, d\psi$.

3°. **Сферические координаты. II.** Система координат $Oxyz$, точка $\forall M(x, y, z)$, переходим к координатам $M(r, \theta, \varphi)$, где $r = |\overline{OM}| \geq 0$, $\theta = (Ox, \widehat{OM'}) \in [0, 2\pi)$, M' – проекция точки M на плоскость Oxy , $\varphi = (Oz, \widehat{OM}) \in [0, \pi]$.

Преобразование (1) - переход от старых переменных к новым:

$$\begin{cases} x = r \cos \theta \sin \varphi, \\ y = r \sin \theta \sin \varphi, \\ z = r \cos \varphi. \end{cases}$$

Якобиан этого преобразования (проверьте!):

$$\begin{aligned} \det J_\psi &= \begin{vmatrix} \cos \theta \sin \varphi & -r \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \cos \varphi \\ \sin \theta \sin \varphi & r \cos \theta \sin \varphi & r \sin \theta \cos \varphi \\ \cos \varphi & 0 & -r \sin \varphi \end{vmatrix} = \\ &= -r^2 \sin^3 \varphi - r^2 \cos^2 \varphi \sin \varphi = -r^2 \sin \varphi \leq 0. \end{aligned}$$

Следовательно, элемент объема равен $dv = r^2 \sin \varphi \, dr \, d\varphi \, d\theta$.

Глава 4. Кратные несобственные интегралы.

Рассмотрим обобщение кратного интеграла на случай неограниченной области интегрирования и неограниченной подинтегральной функции (вводим понятие интеграла для обоих случаев сразу).

Дадим определение кратного несобственного интеграла.

Пусть D – открытое связное множество (связная область) n -мерного евклидова пространства E^n (возможно и неограниченное, м.б. $D = E^n$), $n \geq 2$. Как и в случае $n = 1$ введем понятие последовательности, исчерпывающей D .

Определение. Будем говорить, что последовательность $\{D_l\}_{l=1}^{\infty}$ открытых СВЯЗНЫХ множеств *монотонно исчерпывает множество D* , если 1) замыкание D_l : $\overline{D}_l \subset D, \forall l$, ограниченные кубируемые множества,

2) $\overline{D}_l \subset D_{l+1}, \forall l$, – монотонность расширения,

3) для любого компакта $K \subset D \exists$ номер L , что $K \subset D_L$

($\Rightarrow K \subset D_l, \forall l \geq L$, очевидно, $\bigcup_{l=1}^{\infty} D_l = D$).

Обозначение монотонного исчерпывания множества D :

$$\{D_l\} \hookrightarrow D.$$

Например, $D = E^2$, $D_l = \{(x, y) : x^2 + y^2 < l^2\}$,

$$D_l = \{(x, y) : |x| + |y| < l\};$$

$$D = \{(x, y) : x^2 + y^2 < 1\}, \quad D_l = \{(x, y) : x^2 + y^2 < (1 - \frac{1}{l+1})^2\};$$

$$D = \{(x, y) : 0 < x^2 + y^2 < 1\},$$

$$D_l = \{(x, y) : \frac{1}{(l+1)^2} < x^2 + y^2 < (1 - \frac{1}{l+2})^2\}.$$

Пусть на множестве D задана функция $f(x)$,

$x = (x_1, x_2, \dots, x_n)$, интегрируемая по Риману на любом замкнутом кубируемом подмножестве множества D . Будем рассматривать всевозможные последовательности $\{D_l\}$, монотонно исчерпывающие D .

Определение. Если для любой последовательности $\{D_l\} \hookrightarrow D$, существует конечный предел числовой последовательности $\{a_l\}$,

$$a_l = \int_{\overline{D_l}} f(x) dx, \quad (1)$$

и этот предел не зависит от выбора последовательности $\{D_l\}$, то этот предел называется *несобственным интегралом от функции $f(x)$ по множеству D* и обозначается

$$\int_D f(x) dx = \iint \dots \int_D f(x_1, \dots, x_n) dx_1 \dots dx_n. \quad (2)$$

При этом несобственный интеграл (2) называется *сходящимся*. Символ (2) используется и если предела не существует, тогда интеграл (2) называется *расходящимся*.

Замечание 1. Из определения несобственного интеграла (2) через собственные интегралы (1) следует справедливость основных свойств двойного и n -кратного интегралов для несобственных интегралов (в частности, свойства линейности и аддитивности).

Замечание 2. Если в определении монотонного исчерпывания множества не требовать связности множеств D_l , то аналог интеграла (1) в случае $n = 1$ не будет совпадать с введенным ранее интегралом.

1°. Несобственные интегралы от неотрицательных функций.

Теорема 1. Для сходимости несобственного интеграла (2) от неотрицательной в области D функции $f(x)$, необходимо и достаточно, чтобы хотя бы для одной последовательности областей $\{D_l\} \hookrightarrow D$, была ограниченной числовая последовательность (1) $\{a_l\}$.

Доказательство. Необходимость. Пусть интеграл (2) сходится. Тогда последовательность $\{a_l\}$ (1) сходится для $\forall \{D_l\} \hookrightarrow D$, следовательно, $\{a_l\}$ ограничена для $\forall \{D_l\} \hookrightarrow D$.

Достаточность. Пусть $\exists \{D_l\} \hookrightarrow D$, такая, что последовательность $\{a_l\}$ (1) ограничена. Так как $\{a_l\}$ не убывает ($f(x) \geq 0$, $\overline{D}_l \subset D_{l+1}$), то $\{a_l\}$ сходится к некоторому числу I : $\exists \lim_{l \rightarrow \infty} a_l = I$. Выберем $\forall$ другую $\{D'_l\} \hookrightarrow D$. Докажем, что к этому же числу I сходится последовательность

$$a'_l = \int_{\overline{D}'_l} f(x) dx.$$

Зафиксируем $\forall l$ и рассмотрим область D'_l . По определению $\{D_l\} \hookrightarrow D$, найдется номер L , такой, что компакт $\overline{D}'_l \subset D_L$.

Следовательно, $a'_l \leq a_L \leq I$, т.е. $a'_l \leq I, \forall l$. Но $\{a'_l\}$ монотонно не убывает, следовательно, она монотонна и ограничена, т.е. сходится. Обозначим ее предел I' ,
 $\lim_{l \rightarrow \infty} a'_l = I' \leq I$.

Меняем последовательности a'_l и a_l местами в наших рассуждениях. Зафиксируем $\forall l$, рассмотрим D_l . Так как $\{D'_l\} \hookrightarrow D$, то найдется номер L : $\overline{D}_l \subset D'_L \Rightarrow a_l \leq a'_L \leq I'$, следовательно, $a_l \leq I', \forall l$. Устремляем $l \rightarrow \infty$: $I \leq I'$. Таким образом, $I' = I$. Теорема доказана.

Проиллюстрируем эффективность доказанной теоремы на следующем примере вычисления важного для многих приложений *интеграла Пуассона*.

Пример. Найти значение следующего интеграла:

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx.$$

Вычислим следующий вспомогательный интеграл:

$$I \equiv \iint_{E^2} e^{-x^2-y^2} dx dy.$$

1) Выберем $D_l = \{(x, y) : x^2 + y^2 < l^2\}$, $l = 1, 2, \dots$, очевидно, $\{D_l\} \hookrightarrow D = E^2$. Перейдем в a_l к полярным координатам, используем формулу замены переменных в двойном интеграле и перейдем к повторному интегралу:

$$a_l = \iint_{\overline{D}_l} e^{-x^2-y^2} dx dy = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^l e^{-r^2} r dr = \pi(1 - e^{-l^2}).$$

Последовательность $\{a_l\}$ ограничена, следовательно, по теореме 1 интеграл I сходится. При этом $I = \lim_{l \rightarrow \infty} a_l = \pi$.

2). По определению кратного несобственного интеграла, по любой другой последовательности $\{D'_l\} \hookrightarrow D = E^2$ предел a'_l будет тот же. Выберем $D'_l = \{(x, y) : x \in (-l, l), y \in (-l, l)\}$, очевидно, $\{D'_l\} \hookrightarrow D = E^2$. Но тогда

$$\begin{aligned}\pi = I &= \lim_{l \rightarrow \infty} a'_l = \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\int_{-l}^l e^{-x^2} dx \int_{-l}^l e^{-y^2} dy \right) = \\ &= \lim_{l \rightarrow \infty} \left(\int_{-l}^l e^{-x^2} dx \right)^2 = \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx \right)^2\end{aligned}$$

Следовательно, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi},$

$$\int_0^{\infty} e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$$

Таким образом, интеграл Пуассона равен $\frac{\sqrt{\pi}}{2}.$

Приведем еще одно полезное утверждение для несобственных интегралов от неотрицательных функций.

Теорема 2 (общий признак сравнения). Пусть неотрицательные функции $f(x)$ и $g(x)$ всюду в области D удовлетворяют условию $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Тогда из сходимости несобственного интеграла $\int_D g(x)dx$ следует сходимость несобственного интеграла (2), и из расходимости интеграла (2) следует расходимость интеграла $\int_D g(x)dx$.

Доказательство. Второе утверждение следует из первого: если интеграл (2) расходится, а $\int_D g(x)dx$ сходится, то по первой части теоремы и интеграл (2) сходится, а это не так. Противоречие, следовательно, интеграл $\int_D g(x)dx$ расходится.

Докажем первое утверждение. Пусть $\{D_l\} \hookrightarrow D$. Из неравенства

$$a_l = \int_{\overline{D}_l} f(x) dx \leq \int_{\overline{D}_l} g(x) dx = b_l$$

и ограниченности последовательности $\{b_l\}$ (это следует из сходимости интеграла $\int_D g(x) dx$) следует ограниченность последовательности $\{a_l\}$, но тогда из теоремы 1 следует, что интеграл (2) сходится. Теорема доказана.

Далее будут рассмотрены кратные несобственные интегралы от неотрицательных функций. Что можно сказать об абсолютной и условной сходимости этих интегралов?

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

2°. **Несобственные интегралы от знакопеременных функций.** Выясним связь между сходимостью и абсолютной сходимостью кратных несобственных интегралов.

Определение. Несобственный интеграл (2)

$$\int_D f(x) dx \quad (2)$$

называется *абсолютно сходящимся*, если сходится интеграл $\int_D |f(x)| dx$.

Докажем, что как и в одномерном случае, из абсолютной сходимости интеграла следует его обычная сходимость. Оказывается, что в отличие от одномерного случая, из сходимости кратного несобственного интеграла следует его абсолютная сходимость! Т.е. имеет место утверждение:

Утверждение. Для кратных несобственных интегралов ($n > 1$) понятия сходимости и абсолютной сходимости эквивалентны (т.е. понятие условной сходимости отсутствует).

Отметим еще раз, что из определения несобственного интеграла следует, что если сходятся несобственные интегралы по области D от функций $f(x)$ и $g(x)$, то сходятся интегралы по D от суммы и разности этих функций.

Введем вспомогательные функции, полезные при обосновании следующих двух теорем. Рассмотрим неотрицательные функции

$$f_+(x) = \frac{|f(x)|+f(x)}{2} = \begin{cases} f, & f \geq 0, \\ 0, & f < 0, \end{cases} \quad f_-(x) = \frac{|f(x)|-f(x)}{2} = \begin{cases} 0, & f \geq 0 \\ -f, & f < 0 \end{cases}$$

Очевидно,

$$0 \leq f_+(x) \leq |f(x)|, \quad 0 \leq f_-(x) \leq |f(x)|, \quad (3)$$

и

$$f(x) = f_+(x) - f_-(x), \quad (4)$$

$$|f(x)| = f_+(x) + f_-(x). \quad (5)$$

Теорема 3. Из абсолютной сходимости кратного несобственного интеграла (2) следует его обычная сходимость.

Доказательство. Из справедливости неравенств (3) на множестве D , из абсолютной сходимости интеграла (2) и из теоремы 2 следует, что интегралы по D от функций f_+ и f_- сходятся. Тогда из (4) следует, что и интеграл (2) сходится. Теорема доказана.

Теорема 4. Если кратный интеграл (2) сходится, то он сходится абсолютно.

Доказательство. Допустим, что утверждение неверно. Тогда из теоремы 1 следует, что последовательность $\{a_l\}$,

$$a_l = \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx, \text{ по любой последовательности } \{D_l\} \hookrightarrow D,$$

будет неубывающей бесконечно большой последовательностью.

Из этого заключаем, что последовательность $\{D_l\}$ можно выбрать так, что для $\forall l = 1, 2, \dots$, выполняется неравенство

$$a_{l+1} > 3a_l + 2l + 4$$

(зафиксируем $\forall \{D_l\} \hookrightarrow D$ и проредим ее так, чтобы выполнялось неравенство).

Обозначим $D_{l+1} \setminus \overline{D}_l = P_l$, открытое множество. Запишем неравенство через интегралы:

$$\int_{\overline{D}_{l+1}} |f(x)| dx > 3 \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx + 2l + 4, \quad l = 1, 2, \dots$$

Перенесем один из трех интегралов справа налево:

$$\int_{\overline{P}_l} |f(x)| dx > 2 \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx + 2l + 4.$$

Для того чтобы прийти к противоречию - к расходимости интеграла (2), преобразуем последнее неравенство так, чтобы в левой части остался интеграл по монотонно исчерпывающей множеству D последовательности от функции f (без модуля), а в правой части неравенства, чтобы исчез интеграл от модуля функции.

Из соотношения (5) следует, что

$$\int_{\overline{P}_l} |f(x)| dx = \int_{\overline{P}_l} f_+(x) dx + \int_{\overline{P}_l} f_-(x) dx. \quad (6)$$

Зафиксируем номер l . Из двух интегралов в правой части равенства (6) пусть большим будет первый: $\int_{\overline{P}_l} f_+(x)dx \geq \int_{\overline{P}_l} f_-(x)dx$. Тогда $\int_{\overline{P}_l} |f(x)|dx \leq 2 \int_{\overline{P}_l} f_+(x)dx$, применим это неравенство в левой части основного соотношения:

$$2 \int_{\overline{P}_l} f_+(x)dx \geq \int_{\overline{P}_l} |f(x)|dx > 2 \int_{\overline{D}_l} |f(x)|dx + 2l + 4,$$

делим на 2, получим

$$\int_{\overline{P}_l} f_+(x)dx > \int_{\overline{D}_l} |f(x)|dx + l + 2, \quad (7)$$

Разобьем $\overline{P}_l$ на конечное число кубируемых множеств $\overline{P}_l^i$, $\overline{P}_l^i$ – ограниченные замкнутые связные множества без общих внутренних точек, P_l^i – открытые множества, $\overline{P}_l = \bigcup_{i=1}^r \overline{P}_l^i$,

так, чтобы нижняя сумма $s = \sum_{i=1}^r m_i \Delta \bar{P}_l^i$ (здесь $\Delta \bar{P}_l^i = V_n(\bar{P}_l^i)$, $m_i = \inf_{x \in \bar{P}_l^i} f_+(x)$) функции $f_+(x)$ для этого разбиения

отличалась от интеграла меньше, чем на 1: $\int_{\bar{P}_l} f_+(x) dx - s < 1$.

Тогда $\int_{\bar{P}_l} f_+(x) dx < s + 1$ и неравенство (7) принимает вид

$$s + 1 > \int_{\bar{P}_l} f_+(x) dx > \int_{\bar{D}_l} |f(x)| dx + l + 2,$$

т.е. $s > \int_{\bar{D}_l} |f(x)| dx + l + 1$. Так как $f_+(x) \geq 0$, то $m_i \geq 0$ и в

сумме $\sum_{i=1}^r m_i \Delta \bar{P}_l^i$ можно оставить лишь те слагаемые, для

которых $m_i > 0$. Объединение соответствующих множеств $\bar{P}_l^i$ обозначим $\widetilde{\bar{P}}_l$, $\widetilde{\bar{P}}_l = \bigcup \bar{P}_l^i$, $\tilde{P}_l$ – открытое множество.

На множестве $\widetilde{\overline{P}}_l$ справедливо $m_i > 0$, следовательно, на нем $f_+(x) > 0$, а потому на этом множестве $f_+(x) \equiv f(x)$. После этого преобразования, в левой части основного неравенства вместо s осталась сумма, которая является нижней суммой функции f_+ для разбиения множества $\widetilde{\overline{P}}_l$:

$$s = \sum_{i=1}^r m_i \Delta \overline{P}_l^i = \sum_{m_i \neq 0} m_i \Delta \overline{P}_l^i = s' \leq \int_{\widetilde{\overline{P}}_l} f_+(x) dx = \int_{\widetilde{\overline{P}}_l} f(x) dx,$$

Подставим это в основное неравенство:

$$\int_{\widetilde{\overline{P}}_l} f(x) dx > \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx + l + 1.$$

Обозначим $D_l^* = D_l \cup \widetilde{\overline{P}}_l$, открытое множество. Сложим последнее неравенство со следующим очевидным нерав-вом:

$$\int_{\overline{D}_l} f(x) dx \geq - \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx, \text{ получим}$$

$$\int_{\overline{D}_l^*} f(x) dx > l + 1. \quad (8)$$

Вернемся к соотношению (6), где мы зафиксировали номер l . Если в (6) $\int_{\overline{P}_l} f_+(x) dx < \int_{\overline{P}_l} f_-(x) dx$ для этого l , то проделав те же операции и учитывая, что $f_-(x) = -f(x)$ там, где $f_-(x) > 0$, получим $(-\int_{\overline{\overline{P}}_l} f(x) dx) > \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx + l + 1$ или

$$\int_{\overline{\overline{P}}_l} f(x) dx < -\int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx - l - 1.$$

Сложим это неравенство со следующим очевидным неравенством: $\int_{\overline{D}_l} f(x) dx \leq \int_{\overline{D}_l} |f(x)| dx$, получим

$$\int_{\overline{D_l^*}} f(x) dx < -l - 1. \quad (9)$$

Из соотношений (8), (9) следует, что для любого номера $l = 1, 2, \dots$ справедливо неравенство

$$\left| \int_{\overline{D_l^*}} f(x) dx \right| > l + 1. \quad (10)$$

Это неравенство противоречит сходимости интеграла (2), если $\{D_l^*\} \hookrightarrow D$.

Отметим, что и в случае $n = 1$, т.е. однократного интеграла, аналогичные преобразования приводят к справедливости неравенства (10). Проследите за следующими преобразованиями. Почему в случае $n = 1$ мы не получим противоречия со сходимостью интеграла (2)?

Проверим, выполняется ли в исследуемом случае $\{D_l^*\} \hookrightarrow D$.

Заметим, что $\{D_l^*\}$ может не во всем удовлетворять определению последовательности, монотонно исчерпывающей область D .

Что выполняется: $\overline{D}_l^* \subset D$, D_l^* – открытые множества, $\overline{D}_l^*$ – ограниченные кубируемые множества, так как $D_l \subset D_l^*$, то выполняется третье условие из определения, $\forall K \subset D$ – компакта, $\exists L : K \subset D_L \subset D_L^*$.

Но могут быть нарушены два условия: монотонность расширения и связность множеств D_l^* . Поэтому мы не можем гарантировать, что $\{D_l^*\} \hookrightarrow D$ и, следовательно, неравенства (10) для $l = 1, 2, \dots$ не противоречат сходимости интеграла (2).

Продолжим преобразования.

1. Область D_l^* для каждого l может оказаться несвязной, так как множество $\tilde{P}_l$ может быть несвязным: оставшиеся части P_l^i могут быть не связаны между собой. Чтобы освободиться от этого нарушения, поступим так: малой деформацией сделаем каждое множество D_l^* связным – связываем все области в D_l^* каналами (связками) между собой.

Связки – каналы строим для каждой области D_l^* , т.е. для каждого l . Так как число областей P_l^i в $\tilde{P}_l$ конечно, то и число каналов конечно. Обозначим объединение всех каналов в D_l^* через K_l .

Условия на каналы: 1) каналы – открытые связные множества, замыкание их ограничено и кубируемо, K_l – открытое множество, $\overline{K}_l \subset D_{l+1}$;

2) n -мерный объем $\overline{K}_l$: $V_n(\overline{K}_l) < \frac{1}{M}$, где $M = \sup_{\overline{D}_{l+1}} |f(x)|$.

Возможная погрешность преобразования:

$$\left| \int_{\overline{K}_l} f(x) dx \right| \leq \int_{\overline{K}_l} |f(x)| dx \leq M V_n(\overline{K}_l) < 1.$$

Тогда

$$\begin{aligned} \left| \int_{\overline{D}_l^*} f(x) dx \right| &= \left| \int_{\overline{D}_l^*} f(x) dx + \int_{\overline{K}_l} f(x) dx - \int_{\overline{K}_l} f(x) dx \right| \leq \\ &\leq \left| \int_{\overline{D}_l^* \cup \overline{K}_l} f(x) dx \right| + \left| \int_{\overline{K}_l} f(x) dx \right| < \left| \int_{\overline{D}_l^* \cup \overline{K}_l} f(x) dx \right| + 1. \end{aligned}$$

Результат преобразований: $\left| \int_{\overline{D_l^*}} f(x) dx \right| < \left| \int_{\overline{D_l^* \cup K_l}} f(x) dx \right| + 1.$

Подставим это неравенство в (10):

$$\left| \int_{\overline{D_l^* \cup K_l}} f(x) dx \right| + 1 > \left| \int_{\overline{D_l^*}} f(x) dx \right| > l + 1,$$

т.е.

$$\left| \int_{\overline{D_l^* \cup K_l}} f(x) dx \right| > l, \quad l = 1, 2, \dots \quad (11)$$

Множество $D_l^* \cup K_l$ теперь связное, открытое.

Первое несоответствие с определением монотонного исчерпывания множества мы устранили.

II. Для последовательности $\{D_l^* \cup K_l\}$ выполнены все условия определения монотонного исчерпывания, кроме, быть может, условия монотонности расширения:

$\overline{D_l^* \cup K_l} \subset (D_{l+1}^* \cup K_{l+1})$, так как $\overline{D_l^*}$ может содержать часть границы множества D_{l+1} . Можем лишь гарантировать, что $\overline{D_l^*} \subset \overline{D_{l+1}}$.

Но тогда, используя определение монотонного исчерпывания, заметим, что $\overline{D_l^* \cup K_l} \subset \overline{D_{l+1}} \subset D_{l+2} \subset (D_{l+2}^* \cup K_{l+2})$.

Это означает, что если брать множества в последовательности не подряд, а через одно, то монотонность расширения будет обеспечена. Другие условия рассматриваемого определения от этого не пострадают. Оставим в последовательности элементы с четными номерами.

Таким образом, для последовательности областей $\{D_{2l}^* \cup K_{2l}\}$ выполнены все условия определения монотонного исчерпывания, оценка (11) переходит в оценку

$$\left| \int_{\overline{D_{2l}^* \cup K_{2l}}} f(x) dx \right| > 2l, \quad l = 1, 2, \dots,$$

а это означает расходимость несобственного интеграла (2). Но по условию теоремы этот интеграл сходится.

Полученное противоречие доказывает, что предположение об абсолютной расходимости интеграла (2) неверно, следовательно, интеграл (2) сходится абсолютно.

Теорема доказана.

Замечание. Формула замены переменных, приведенная ранее для кратных собственных интегралов, при тех же предположениях справедлива и для кратных несобственных интегралов. Она принимает вид:

$$\int_D f(y)dy = \int_{D'} f(\psi(x))|\det J_\psi(x)|dx.$$

Для доказательства этой формулы достаточно выбрать произвольную последовательность областей $\{D_l\} \hookrightarrow D$, записать формулу замены переменных для множеств $\overline{D}_l$ и перейти в полученном равенстве к пределу при $l \rightarrow \infty$.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Глава 5. Криволинейные интегралы.

Пусть $L = \smile AB$ –спрямляемая кривая на плоскости Oxy без точек самопересечения и самоналегания, незамкнутая, ограниченная точками A и B , задаваемая параметрическими уравнениями:

$$\begin{cases} x = \varphi(t), \\ y = \psi(t), \end{cases} \quad t \in [a, b], \quad (1)$$

$A(\varphi(a), \psi(a)), B(\varphi(b), \psi(b))$.

Пусть функции $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$ определены на кривой L и непрерывны вдоль L ($f(x, y) : \forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что $|f(M_1) - f(M_2)| < \varepsilon \quad \forall M_1, M_2 \in L, \quad \rho(M_1, M_2) < \delta$).

Разобьем отрезок $[a, b]$ точками $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$ на n частичных отрезков $[t_{k-1}, t_k], k = \overline{1, n}$. Так как любой точке t_k на L соответствует определенная точка $M_k(x_k, y_k)$ с координатами $x_k = \varphi(t_k), y_k = \psi(t_k)$, то вся кривая $L = AB$ распадается на n частичных дуг $\smile M_0M_1, \smile M_1M_2, \dots, \smile M_{n-1}M_n$.

Выберем на дуге $\smile M_{k-1}M_k$ произвольную точку $N_k(\xi_k, \eta_k)$, координаты ее отвечают некоторому значению τ_k параметра t , так что $\xi_k = \varphi(\tau_k)$, $\eta_k = \psi(\tau_k)$, причем $t_{k-1} \leq \tau_k \leq t_k$.

Обозначим Δl_k длину $|\smile M_{k-1}M_k|$, $k = \overline{1, n}$ и пусть $\Delta = \max_k \Delta l_k$ – диаметр разбиения кривой L .

Составим три интегральные суммы.

$$\sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k, \quad \sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k, \quad \sigma_3 = \sum_{k=1}^n Q(\xi_k, \eta_k) \Delta y_k,$$

$$\Delta x_k = x_k - x_{k-1}, \quad \Delta y_k = y_k - y_{k-1}.$$

Определение. Назовем число I_s , $s = 1, 2, 3$, *пределом интегральной суммы* σ_s при диаметре разбиения $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что $|\sigma_s - I_s| < \varepsilon$ при $\Delta < \delta$, независимо от выбора т. $N_k \in \smile M_{k-1}M_k$.

Определение. Если существует предел I_1 интегральной суммы σ_1 при $\Delta \rightarrow 0$, то этот предел называется *криволинейным интегралом первого рода* от функции $f(x, y)$ по кривой L . Обозначение:

$$I_1 = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_1 = \int_L f(x, y) dl = \int_{AB} f(x, y) dl.$$

Замечание. Из вида суммы σ_1 очевидно, что криволинейный интеграл первого рода не зависит от того, в каком направлении от A к B или от B к A пробегается кривая.

Определение. Если существует предел $I_s, s = 2, 3$, интегральной суммы $\sigma_2(\sigma_3)$ при $\Delta \rightarrow 0$, то этот предел называется *криволинейным интегралом второго рода* от функции $P(x, y)(Q(x, y))$ по пути AB (по кривой $L = AB$).

Обозначение: $\int_{AB} P(x, y) dx$ ($\int_{AB} Q(x, y) dy$). Сумму этих интегралов называют *общим криволинейным интегралом второго рода*, обозначение:

$$\int_{AB} P(x, y) dx + \int_{AB} Q(x, y) dy \equiv \int_{AB} P(x, y) dx + Q(x, y) dy.$$

Замечание. Из вида сумм σ_2, σ_3 следует, что для криволинейного интеграла второго рода изменение направления на кривой ведет к изменению знака, т.е.

$$\int_{AB} Pdx + Qdy = - \int_{BA} Pdx + Qdy.$$

Физический смысл криволинейных интегралов.

1. Пусть вдоль кривой L распределена масса с линейной плотностью $f(x, y)$. Вычисляем массу кривой. Разбиваем кривую на малые части, так что на каждой части плотность $\approx \text{const}$, тогда масса k -ой части равна произведению плотности на длину Δl_k , а масса всей кривой $L \approx$ интегральной сумме σ_1 . Переходя к пределу при $\Delta \rightarrow 0$, получим массу кривой.

Криволинейный интеграл первого рода I_1 дает массу кривой, линейная плотность вдоль которой равна $f(x, y)$ (+ площадь криволинейной трапеции с изогнутым основанием).

2. Пусть материальная точка движется вдоль кривой L из A в B под действием силы $\vec{F}(x, y)$ с составляющими $P(x, y), Q(x, y)$: $\vec{F} = Pi + Qj$, i, j – единичные базисные векторы.

Вычислим работу силы. Работа силы $\vec{F}$ равна сумме работ составляющих по соответствующему пути. Разбив L на части, на которых сила $\approx \text{const}$, получим, что работа на пути $\Delta l_k \approx P(\xi, \eta)\Delta x_k + Q(\xi, \eta)\Delta y_k$. Следовательно, полная работа $\approx$ равна сумме $\sigma_2 + \sigma_3$. Точное значение работы равно пределу этой суммы при $\Delta \rightarrow 0$.

Общий криволинейный интеграл второго рода дает *работу по перемещению материальной точки* из A в B вдоль кривой L под действием силы с составляющими $P(x, y), Q(x, y)$.

Замечание. В E^3 – пространственная кривая – все вводится аналогично. $L: x = \varphi(t), y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]$, на кривой заданы функции $f(x, y, z), P, Q, R$, вводятся интегралы

$\int_{AB} f(M)dl$, – интеграл первого рода, $\int_{AB} P(M)dx, \int_{AB} Q(M)dy$,

$\int_{AB} R(M)dz$, – интегралы второго рода и $\int_{AB} Pdx + Qdy + Rdz$,

– общий криволинейный интеграл второго рода.

В пространстве E^n все вводится аналогично. $L: x_1 = \varphi_1(t), \dots, x_n = \varphi_n(t), t \in [a, b]$, функции $f(x), f_1, \dots, f_n$,

интегралы $\int_{AB} f(M)dl$, $\int_{AB} f_1 dx_1 + f_2 dx_2 + \dots + f_n dx_n$.

Существование и вычисление криволинейных интегралов. **Определение.** Кривая L называется *гладкой*, если она допускает гладкую параметризацию (1), т.е. если функции $\varphi(t), \psi(t)$ из (1) имеют на отрезке $[a, b]$ непрерывные производные $\varphi'(t), \psi'(t)$ (непрерывные на (a, b) и существуют конечные предельные значения в т. a справа и в т. b слева).

Определение. Кривая L называется *кусочно-гладкой*, если она непрерывна и состоит из конечного числа гладких кривых, не имеющих общих внутренних точек.

Определение. Точка M гладкой кривой L называется *обыкновенной*, если существует гладкая параметризация (1) этой кривой, такая, что $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$ в этой точке. Точка M гладкой кривой L , не являющаяся обыкновенной, называется *особой точкой*.

Необходимым условием того, что точка гладкой кривой является особой, – выполнение равенства $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) = 0$ в этой точке в любой параметризации.

Пример гладкой кривой с особой точкой. $L : y^3 - x^2 = 0$. Пусть $x = t^3, y = t^2$, гладкая параметризация. Т. $M(0, 0)$ является особой – точка возврата или точка заострения (нарисуйте эскиз графика!).

Замечание. Нужно разумно подбирать параметризацию кривой. Так, для $L : y = x$ можно ввести параметризацию $x = t, y = t$, откуда следует, что кривая является гладкой и без особых точек. А можно положить $x = y = t^3$ и кривая будет гладкой с "особой" точкой $(0,0)$, а при параметризации $x = y = \sqrt[3]{t}$, кривая и вовсе будет "негладкой".

Теорема. Пусть L – гладкая кривая без особых точек, (1) – ее гладкая параметризация, при этом $\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) \neq 0$, $\forall t \in [a, b]$. Пусть функции $f(x, y), P(x, y), Q(x, y)$ – непрерывны на L . Тогда существуют криволинейные интегралы I_1, I_2, I_3 и для их вычисления справедливы следующие формулы:

$$I_1 = \int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \quad (2)$$

$$I_2 = \int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad (3)$$

$$I_3 = \int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(\varphi(t), \psi(t)) \psi'(t) dt. \quad (4)$$

Доказательство. Докажем теорему для интегралов I_1, I_2 (случай интеграла I_3 рассматривается аналогично I_2). Обозначим определенные интегралы в правых частях формул (2), (3) через K_1, K_2 соответственно. Эти интегралы существуют, так как подинтегральные функции в них непрерывны на отрезке $[a, b]$.

Разобьем отрезок $[a, b]$: $a = t_0 < t_1 < \dots < t_n = b$, на n частичных отрезков, составим интегральные суммы σ_1, σ_2 , диаметр разбиения Δ . Учтем, что для гладкой кривой

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt, \text{ а } \Delta x_k = x_k - x_{k-1} =$$

$$= \varphi(t_k) - \varphi(t_{k-1}) = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt. \text{ Подставим эти формулы в}$$

$$\text{интегральные суммы. Получим } \sigma_1 = \sum_{k=1}^n f(\xi_k, \eta_k) \Delta l_k =$$

$$= \sum_{k=1}^n \left[f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \right], \text{ где мы учли, что}$$

$$\xi_k = \varphi(\tau_k), \eta_k = \psi(\tau_k), \tau_k \in [t_{k-1}, t_k];$$

$$\sigma_2 = \sum_{k=1}^n P(\xi_k, \eta_k) \Delta x_k = \sum_{k=1}^n \left[P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) \int_{t_{k-1}}^{t_k} \varphi'(t) dt \right].$$

Разбиваем интегралы K_1, K_2 в (2), (3) на сумму интегралов:

$$K_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} f(\varphi(t), \psi(t)) \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt,$$

$$K_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} P(\varphi(t), \psi(t)) \varphi'(t) dt, \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

Рассмотрим разность σ_1 и K_1 .

$$\sigma_1 - K_1 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [f(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - f(\varphi(t), \psi(t))] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt. \quad (5)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (5) через Δf .

Так как функции $x = \varphi(t)$, $y = \psi(t)$ непрерывны на $[a, b]$, а функции $f(x, y)$, $P(x, y)$ непрерывны вдоль кривой L , то по теореме о непрерывности сложной функции $f(\varphi(t), \psi(t))$, $P(\varphi(t), \psi(t))$ непрерывны на отрезке $a \leq t \leq b$ и равномерно непрерывны на этом отрезке. Следовательно, малым приращениям аргумента Δt_k отвечают малые приращения функций $\Delta f, \Delta P$. Но у нас $\Delta \rightarrow 0$. Если Δl_k мало, будет ли Δt_k тоже мало?

Покажем, что если $\Delta \rightarrow 0$, то $\Delta t = \max_k \Delta t_k \rightarrow 0$. Из условий теоремы следует, что функция $\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)}$ непрерывна на $[a, b]$ и строго > 0 (нет особых точек). Следовательно, $m = \min_{a \leq t \leq b} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} > 0$. Но тогда

$$\Delta l_k = \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt \geq m \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = m \Delta t_k, \text{ т.е.}$$

$\Delta t_k \leq \frac{\Delta l_k}{m} \leq \frac{\Delta}{m}$. Поэтому, если $\Delta \rightarrow 0$, то и $\Delta t \rightarrow 0$. Доказано.

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \Delta < \delta, |df| < \frac{\varepsilon}{l}, l = |L|$ – длина кривой L . Таким образом, при $\Delta < \delta$ справедливо

$$|\sigma_1 - K_1| < \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} dt = \frac{\varepsilon}{l} \sum_{k=1}^n \Delta l_k = \frac{\varepsilon}{l} \cdot l = \varepsilon,$$

независимо от выбора точек N_k на дугах $\smile M_{k-1}M_k$.

Следовательно, $\lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_1 = K_1$ и справедлива формула (2).

Рассмотрим $\sigma_2 - K_2$.

$$\sigma_2 - K_2 = \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} [P(\varphi(\tau_k), \psi(\tau_k)) - P(\varphi(t), \psi(t))] \varphi'(t) dt. \quad (6)$$

Обозначим выражение в квадратных скобках в (6) через ΔP . В силу проведенных выше рассуждений, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0 :$

$$\Delta < \delta, |\Delta P| < \frac{\varepsilon}{M(b-a)}, \text{ где } M = \max_{t \in [a,b]} |\varphi'(t)|.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
 |\sigma_2 - K_2| &< \frac{\varepsilon}{M(b-a)} \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} |\varphi'(t)| dt \leq \frac{\varepsilon}{M(b-a)} M \sum_{k=1}^n \int_{t_{k-1}}^{t_k} dt = \\
 &= \frac{\varepsilon}{(b-a)} \sum_{k=1}^n \Delta t_k = \frac{\varepsilon}{(b-a)} (b-a) = \varepsilon, \text{ независимо от выбора точек} \\
 N_k \text{ на дугах } \cup M_{k-1}M_k. \text{ Следовательно, } \exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sigma_2 = K_2 \text{ и} \\
 &\text{справедлива формула (3). Теорема доказана.}
 \end{aligned}$$

Замечания. 1. Пусть L – кусочно-гладкая кривая. Тогда криволинейный интеграл по L естественно определить как сумму соответствующих криволинейных интегралов по всем гладким кускам, составляющим кривую L (и не имеющим общих внутренних точек). Тогда равенства (2) – (4) верны и для всех кусочно-гладких кривых без особых точек (в правых частях равенств будут стоять суммы интегралов по гладким кускам). Эти равенства верны и в случае, если функции f, P, Q не являются строго непрерывными, а лишь кусочно-непрерывны вдоль кривой L .

2. Аналогичные результаты справедливы для криволинейных интегралов по пространственной кривой $L \equiv AB = \{x = \varphi(t),$

$$y = \psi(t), z = \chi(t), t \in [a, b]\}: \int_{AB} f(x, y, z) dl = \\ = \int_a^b f[\varphi(t), \psi(t), \chi(t)] \sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t) + \chi'^2(t)} dt \text{ и др.}$$

$$\text{В } E^n, n > 3, \text{ аналогично: } \int_{AB} f(x_1, \dots, x_n) dl = \\ = \int_a^b f(\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t)) \sqrt{\sum_{k=1}^n \varphi_k'^2(t)} dt \text{ и др.}$$

3. Мы установили, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления обхода кривой $L = AB$. Пусть теперь L – замкнутая кривая (т. $A = B$). Как понимать символ

$$\int_L P(x, y) dx + Q(x, y) dy = \oint_L P dx + Q dy? \quad (7)$$

Определение. Из двух возможных направлений обхода замкнутого контура L , назовем *положительным* то направление обхода, при котором область, лежащая внутри контура, остается по левую сторону по отношению к точке,

совершающей обход (т.е. движение "против часовой стрелки").

Будем считать, что в интеграле (7) по замкнутому контуру L этот контур всегда обходится в положительном направлении.

4. Свойства криволинейных интегралов аналогичны свойствам обычных определенных интегралов (выписываем для инт. 1 рода, для инт. 2 рода все аналогично). Пусть функции f, g интегрируемы на кривой $L = AB$.

1) Линейное свойство. $\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R}$ функция $\alpha f + \beta g$ интегрируема на L и справедливо равенство

$$\int_{AB} (\alpha f(x, y) + \beta g(x, y)) dl = \alpha \int_{AB} f(x, y) dl + \beta \int_{AB} g(x, y) dl.$$

2) Аддитивность. Пусть $AB = AC \cup CB$, $AC \cap CB = C$, тогда функция f интегрируема на AC и CB и

$$\int_{AB} f(x, y) dl = \int_{AC} f(x, y) dl + \int_{CB} f(x, y) dl.$$

$$3) \exists \int_{AB} |f(x, y)| dl \text{ и } \left| \int_{AB} f(x, y) dl \right| \leq \int_{AB} |f(x, y)| dl.$$

4) Формула среднего значения. Если функция $f(x, y)$ непрерывна вдоль AB , то $\exists M \in AB$, что

$$\int_{AB} f(x, y) dl = l \cdot f(M), \text{ где } l = |\smile AB| - \text{длина } AB.$$

Справедливы также свойства 5) если $f \leq g$, то интегралы от этих функций по L связаны таким же неравенством, 6) функция $f \cdot g$ интегрируема на L , 7) интеграл по L от 1 равен длине кривой L .

5. Другие способы задания кривой L .

$$1) y = g(x), x \in [a, b]. L : \begin{cases} x = t \\ y = g(t) \end{cases},$$

$$\sqrt{\varphi'^2(t) + \psi'^2(t)} = \sqrt{1 + g'^2(t)} = \sqrt{1 + y'^2(t)},$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(x, y(x)) \sqrt{1 + y'^2(x)} dx,$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(x, y(x)) dx,$$

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(x, y(x)) y'(x) dx.$$

$$2) \begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad \varphi \in [\varphi_0, \varphi_1], \quad r \geq 0.$$

а) пусть $r = r(\varphi)$, $L : x = x(\varphi), y = y(\varphi)$, $\varphi \in [\varphi_0, \varphi_1]$ (напр., дуга окружности),

$$\begin{aligned} \sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} &= \sqrt{(r \cos \varphi)'_{\varphi}^2 + (r \sin \varphi)'_{\varphi}^2} = \\ &= \sqrt{(r' \cos \varphi - r \sin \varphi)^2 + (r' \sin \varphi + r \cos \varphi)^2} = \sqrt{r^2 + r'^2}, \end{aligned}$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{r^2(\varphi) + r'^2(\varphi)} d\varphi,$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (r' \cos \varphi - r \sin \varphi) d\varphi,$$

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_{\varphi_0}^{\varphi_1} Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (r' \sin \varphi + r \cos \varphi) d\varphi.$$

б) пусть $\varphi = \varphi(r)$, $L : x = x(r), y = y(r)$, $r \in [a, b]$, $r \sim t$
(напр., радиусы в круговом секторе),

$$\begin{aligned}\sqrt{\varphi'^2 + \psi'^2} &= \sqrt{(r \cos \varphi)'_r^2 + (r \sin \varphi)'_r^2} = \\ &= \sqrt{(\cos \varphi - r \varphi'_r \sin \varphi)^2 + (\sin \varphi + r \varphi'_r \cos \varphi)^2} = \sqrt{1 + r^2 \varphi_r'^2},\end{aligned}$$

$$\int_L f(x, y) dl = \int_a^b f(r \cos \varphi, r \sin \varphi) \sqrt{1 + r^2 \varphi_r'^2} dr,$$

$$\int_{AB} P(x, y) dx = \int_a^b P(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (\cos \varphi - r \varphi'_r \sin \varphi) dr,$$

$$\int_{AB} Q(x, y) dy = \int_a^b Q(r \cos \varphi, r \sin \varphi) (\sin \varphi + r \varphi'_r \cos \varphi) dr.$$

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Глава 6. Поверхностные интегралы.

В этой главе введем понятия поверхности, площади поверхности, затем понятие интегралов по поверхности. Рассматриваем пространство E^3 .

§1. Поверхность и ее основные свойства.

1°. Поверхность, касательная плоскость и нормаль к поверхности.

Определение 1. Рассмотрим два множества G и G^* в пространстве E^3 . Отображение f множества G на G^* называется *гомеоморфным*, если это отображение

1) представляет собой взаимно однозначное соответствие между точками G и G^* ,

2) взаимно непрерывно, т.е. любой сходящейся послед-ти точек $\{M_n\} \in G$ соответствует сходящаяся последовательность точек $\{M_n^*\} \in G^*$ и обратно, любой сходящейся последовательности точек $\{M_n^*\} \in G^*$ отвечает сходящаяся последовательность точек $\{M_n\} \in G$, $M_n^* = f(M_n)$.

(Другими словами: 1) $\exists f^{-1}$, 2) f, f^{-1} непрерывны.)

§1. Поверхность и ее основные свойства.

G^* называется *образом* G при гомеоморфном отображении f в пространство; G – прообраз G^* .

Пример. Множество $G \subset Oxy, z = z(M) = z(x, y)$ – непрерывная функция на G , G^* – график функции.

Отображение $f : G \rightarrow G^*$, задаваемое соотношениями $x = u, y = v, z = z(u, v)$, является гомеоморфным отображением множества G на множество G^* . В частности, f может быть тождественным преобразованием, т.е. $G^* = G$.

Определение 2. *Окрестностью точки M множества $\Phi \subset E^3$* называется общая часть множества Φ и пространственной окрестности (например, шара) точки M .

Определение 3. Множество Φ точек пространства E^3 называется *простой поверхностью*, если это множество связно и любая точка этого множества имеет окрестность, которая является образом открытого круга G при гомеоморфном отображении G в пространство.

Например, простые поверхности сфера, полусфера без границы, плоскость, круг без границы, открытый круг с выколотой точкой (напр., центром), тор, эллипсоид, график дифференцируемой функции без границы.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Множество предельных точек простой поверхности, не принадлежащие ей, называется ее *границей* или *краем*. Например, сфера, плоскость – простые поверхности без края, полусфера – простая поверхность с краем.

Определение 4. Отображение f множества G на множество $\Phi \subset E^3$ называется *локально-гомеоморфным*, если у каждой точки G есть окрестность, которая гомеоморфно отображается на свой образ в Φ . *Общей поверхностью* называется образ простой поверхности G при локально-гомеоморфном отображении ее в пространство.

Замечания. 1. Окрестности точек на общей поверхности вводятся как образы окрестностей точек той простой поверхности, образом которой является данная поверхность.

2. Простая поверхность, очевидно, является поверхностью без самопересечений и самоналеганий. Общая поверхность может иметь самопересечения и самоналегания.

Примеры таких общих поверхностей, не являющихся простыми поверхностями. 1) Отображаем прямоугольник на два цилиндра, имеющие общую линию – образующую (самопересечение);

§1. Поверхность и ее основные свойства.

2) двуслойная поверхность (два "слипающихся" круга, самоналегание)

$$\begin{cases} x = r \cos \varphi \\ y = r \sin \varphi \end{cases}, \quad r \in (0, 1), \varphi \in (0, 4\pi).$$

Определение 5. Область G на плоскости T называется *элементарной*, если она является образом открытого круга при гомеоморфном отображении этого круга на плоскость T .

Определение 6. Поверхность Φ в пространстве $Oxyz$ называется *гладкой*, если у каждой точки Φ есть окрестность, допускающая гладкую параметризацию, т.е. каждая указанная окрестность представляет собой гомеоморфное отображение некоторой элементарной области G в плоскости (u, v) при помощи соотношений

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in G, \quad (1)$$

коротко: $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, $\vec{r} = \{x, y, z\}$, в которых функции $x(u, v)$, $y(u, v)$, $z(u, v)$ являются непрерывно дифференцируемыми в G (гладкие, непрер. диффер. и все частные производные первого порядка непрерывны).

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Например, сфера, плоскость, двуслойный круг из примера выше – гладкие поверхности.

Определение 7. Точка M_0 гладкой поверхности называется *обыкновенной*, если существует такая гладкая параметризация (1) некоторой ее окрестности, что в этой точке ранг матрицы

$$A = \begin{pmatrix} x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{pmatrix} \quad (2)$$

равен двум (точнее, т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$, ее прообраз $N_0(u_0, v_0)$, $x_0 = x(u_0, v_0), \dots, z_0 = z(u_0, v_0)$, тогда $\text{rang } A|_{N_0} = 2$).

В противном случае точка поверхности называется *особой*.

Определение 8. Область G на плоскости называется *простой*, если эта область представляет собой простую поверхность (напр., открытый круг, кольцо без границы – простые области).

Замечание. Если вся поверхность Φ представляет отображение простой плоской области G при помощи соотношений (1), то говорят, что на Φ введена *единая параметризация*. Система (1) наз. *гладкой параметризацией поверхности*.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Теорема 1. Пусть в простой области G на плоскости (u, v) заданы гладкие функции (1) и ранг матрицы (2) равен 2 во всех точках G . Тогда соотношения (1) определяют в пространстве множество Φ , которое представляет собой гладкую общую поверхность без особых точек.

Пример. Пусть G – простая область на плоскости Oxy (напр., $G : x^2 + y^2 < 1$), $z = z(x, y)$ – непрерывно дифференцируемая функция на G . Тогда выполняются условия теоремы 1. Формулы (1): $x = u, y = v, z = z(u, v)$, матрица

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{pmatrix}, \text{rang } A = 2 \quad \forall (x, y) \in G. \text{ Следовательно,}$$

$\Phi = G^*$ – график функции, – гладкая поверхность без особых точек (очевидно, это простая поверхность).

Доказательство теоремы. Докажем, что с помощью соотношений (1) осуществляется локально-гомеоморфное отображение области G на множество Φ .

Зафиксируем $\forall$ т. $N_0(u_0, v_0) \in G$. Так как Φ – образ G , то точке N_0 соответствует некоторая т. $M_0(x_0, y_0, z_0)$ на множестве Φ , $x_0 = x(u_0, v_0), \dots, z_0 = z(u_0, v_0)$.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Докажем, что найдется окрест-ть т. N_0 , которая гомеоморфно отображается на Φ – на некот. окрест-ть т. M_0 .

По условию $\text{rang } A|_{N_0} = 2$. Пусть для определенности

$\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} \Big|_{N_0} \neq 0$. Этот определитель является якобианом

$\frac{D(x,y)}{D(u,v)}$ и он $\neq 0$ в точке (u_0, v_0) , а функции $x(u, v), y(u, v)$ имеют непрерывные частные производные в области G , т.е. выполнены все условия теоремы о разрешимости системы

функциональных уравнений $\begin{cases} x(u, v) - x = 0 \\ y(u, v) - y = 0 \end{cases}$. По этой

теореме найдется такая окрестность $\tilde{P}$ точки $P_0(x_0, y_0)$ на плоскости Oxy ($x_0 = x(u_0, v_0), \dots$), что в пределах этой окрест-ти существует единственное дифференцир. решение

$$u = u(x, y), \quad v = v(x, y), \quad (x, y) \in \tilde{P}, \quad (3)$$

этой системы. Из этого мы заключаем, что окрестность $\tilde{P}$ точки P_0 представляет собой гомеоморфное отображение некоторой окрестности $\tilde{N}$ точки N_0 с помощью соотношений

§1. Поверхность и ее основные свойства.

$x = x(u, v), y = y(u, v)$ (обратное отображение $\tilde{P}$ на $\tilde{N}$ осуществляется соотношениями (3)).

Подставляя соотношения (3) для u, v в оставшееся соотношение $z = z(u, v)$ в (1), убедимся, что некоторая окрестность $\tilde{M}$ точки M_0 на множестве Φ является графиком дифференцируемой функции $z = z(u(x, y), v(x, y)) \equiv \varphi(x, y)$, $(x, y) \in \tilde{P}$. А это означает, что с помощью функции $\varphi(x, y)$ осуществляется гомеоморфное отображение окрестности $\tilde{P}$ точки P_0 плоскости Oxy на указанную окрестность $\tilde{M}$ точки M_0 множества Φ . Очевидно, что окрестность $\tilde{N}$ точки N_0 гомеоморфно отображается на окрестность $\tilde{M}$ точки $M_0 \in \Phi$ (суперпозиция гомеоморфных отображений есть гомеоморфное отображение).

Таким образом, Φ есть образ G при локально-гомеоморфном отображении G в пространство и является поэтому общей поверхностью. *Теорема доказана.*

Следствие 1 из теоремы 1. Любая обыкновенная точка M_0 гладкой поверхности Φ имеет окрестность $\widetilde{M}$, однозначно проецирующуюся на одну из координатных плоскостей и являющуюся поэтому графиком дифференцируемой функции (в доказательстве леммы этой функцией была $\varphi(x, y)$).

Из утверждения следствия заключаем (по материалу курса Математический анализ I), что в любой обыкновенной точке гладкой поверхности Φ существует касательная плоскость к Φ . Далее найдем векторы, лежащие в касательной плоскости, связанные с (1) и построим вектор нормали к Φ (найдем для этого вектора аналитическое представление).

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

ГЕОМЕТРИЯ

Мы доказали, что при условиях теоремы 1 простая область G в плоскости переменных (u, v) отображается векторной функцией $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ на поверхность Φ (локально-гомеоморфно). Геометрически, для данной т. $M \in \Phi$ вектор $\vec{r} = \vec{r}(M)$ – радиус-вектор точки M относительно начала координат в декартовой системе. Назовем $\vec{r}(M)$ *радиус-вектором поверхности* Φ .

Зафиксируем некоторую обыкновенную т. $M_0 \in \Phi$, $M_0(x_0, y_0, z_0)$, $\exists N_0(u_0, v_0) \in G: x_0 = x(u_0, v_0), \dots, z_0 = z(u_0, v_0)$. Рассмотрим ту окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 на Φ , которая представляет собой образ гомеоморфного отображения некоторой простой плоской области $\widetilde{G} \subset G$ при помощи соотношений (1) (или $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$).

Тогда координаты т. $M(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \in \widetilde{M}$ являются координатами вектора $\vec{r}(M)$. Функция $\vec{r}(M)$ в этой окрестности будет функцией переменных $u, v: \vec{r}(M) = \vec{r}(u, v)$.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Зафиксируем переменную $v = v_0$, конец радиус-вектора $\vec{r}(u, v_0)$ описывает в рассматриваемой окрестности $\widetilde{M}$ кривую, называемую *линией u* ($v = \text{const}$). При этом, $\vec{r}_u(u, v_0)$ – вектор касательной к линии u .

Зафиксируем $u = u_0$. Тогда $\vec{r}(u_0, v)$ описывает *линию v* ($u = \text{const}$). При этом, $\vec{r}_v(u_0, v)$ – вектор касательной к линии v . Эти линии u и v называются *координатными линиями* на поверхности Φ в рассматриваемой окрестности.

Так в некоторой окрестности каждой точки поверхности Φ может быть введена система координатных линий u и v – *система криволинейных координат на поверхности* (говорят "локально").

Если зафиксировать $u = u_0$ и $v = v_0$, то $\vec{r}_u(u_0, v_0)$ и $\vec{r}_v(u_0, v_0)$ – векторы касательных в т. M_0 к координатным линиям u и v соответственно. Заметим, что в матрице (2) A строки – координаты векторов $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$. Ранг матрицы A в т. $N_0(u_0, v_0)$ равен 2. Следовательно, векторы $\vec{r}_u$ и $\vec{r}_v$ – линейно независимы в т. N_0 , т.е. они неколлинеарны, и поэтому порождают некоторую плоскость, которая называется *касательной плоскостью к поверхности Φ* .

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Итак, в любой обыкновенной точке гладкой поверхности Φ существует касательная плоскость.

Нормалью к поверхности Φ в т. M_0 называется прямая, проходящая через т. M_0 и перпендикулярная к касательной плоскости к поверхности Φ в т. M_0 . *Вектор нормали* – ненулевой вектор, коллинеарный нормали.

Очевидно, если M_0 – обыкновенная точка гладкой поверхности Φ и некоторая окрестность $\widetilde{M}$ этой точки определена векторной функцией $\vec{r}(u, v)$, то вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]|_{M_0}$ является вектором нормали к поверхности в т. M_0 , а $\vec{n} = \frac{[\vec{r}_u, \vec{r}_v]}{||[\vec{r}_u, \vec{r}_v]||}|_{M_0}$ – является единичным вектором нормали к поверхности в т. M_0 . Так как по условию поверхность Φ является гладкой, то векторные функции $\vec{N}(u, v), \vec{n}(u, v)$ будут непрерывными в $\widetilde{M}$. Приходим к следующему утверждению.

Следствие 2 из теоремы 1. В некоторой окрестности каждой обыкновенной точки гладкой поверхности существует непрерывное векторное поле нормалей (векторное поле = векторная функция).

§1. Поверхность и ее основные свойства.

На всякой ли гладкой поверхности без особых точек существует непрерывное в целом (т.е. на всей поверхности) векторное поле нормалей? Существуют поверхности, на которых не существует непрерывного в целом векторного поля нормалей (лист Мёбиуса, напр.)

Определение 9. Поверхности, на которых существует непрерывное в целом векторное поле нормалей, называются *двусторонними*. Поверхности, на которых такого поля не существует, называются *односторонними*.

В дальнейшем рассматриваем только двусторонние поверхности.

Определение 10. Поверхность Φ называется *полной*, если любая фундаментальная последовательность точек этой поверхности сходится к некоторой точке поверхности Φ ; т.е. поверхность Φ полная, если множество точек ее составляющее является замкнутым.

Напр., сфера – полная поверхность, открытый круг – неполная поверхность.

Далее рассматриваем ограниченные полные поверхности и ограниченные замкнутые части полных поверхностей.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

[Поверхность ограниченная, если ее можно поместить в некоторый шар конечного радиуса.]

Будем рассматривать поверхности, удовлетворяющие ПЯТИ УСЛОВИЯМ (*):

- 1) гладкие, 2) без особых точек, 3) двусторонние,
- 4) ограниченные, 5) полные или замкнутые части полных поверхностей с границей площади нуль. (*)

2°. **Леммы о проекциях.** Прежде, чем ввести понятие площади поверхности, необходимо обосновать возможность разбиения поверхности Φ на подходящие части.

["Сапог Шварца", 1890 г.]

Лемма 1. Пусть M_0 – обыкновенная точка гладкой поверхности Φ . Тогда некоторая окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 однозначно проецируется на касательную плоскость к поверхности Φ , проведенную в произвольно зафиксированной точке этой окрестности.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Доказательство. Убедимся, что указанным в лемме свойством обладает, например, та окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 , в пределах которой вектор нормали к поверхности в любой точке составляет с вектором нормали в т. M_0 угол, меньший $\frac{\pi}{4}$ и которая однозначно проецируется на некоторый круг в одной из координатных плоскостей (напр., Oxy).

Возможность выбора такой окрестности вытекает из следствия 2 из теоремы 1 о существовании непрерывного векторного поля нормалей в окрестности т. M_0 и из следствия 1 о возможности спроецировать некоторую окрестность т. M_0 на координатную плоскость. Очевидно, в этой окрестности есть часть, проецирующаяся на некоторый круг в координатной плоскости.

Отметим, что векторы нормали к поверхности Φ в любых двух точках в окрестности $\widetilde{M}$ образуют угол, меньший $\frac{\pi}{2}$.

Предположим, что окрестность $\widetilde{M}$ не обладает указанным в лемме свойством, т.е. не проецируется однозначно на касательную плоскость к Φ в некоторой точке $M \in \widetilde{M}$.

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Тогда для этой точки $M \in \widetilde{M}$ найдутся точки $P, Q \in \widetilde{M}$, такие что хорда $\overline{PQ} \parallel \vec{n}(M)$ в т. M (т.е. обе точки проецируются на касательную плоскость в одну точку).

Рассмотрим линию пересечения Φ с плоскостью, параллельной оси Oz и проходящей через $\overline{PQ}$. В силу выбора окрестности $\widetilde{M}$ часть PNQ этой линии лежит в $\widetilde{M}$ и представляет собой график дифференцируемой функции, заданной на отрезке $\overline{P'Q'}$, являющемся проекцией $\overline{PQ}$ на плоскость Oxy . По теореме Лагранжа (курс МА I) касательная в некоторой точке N этой части линии пересечения параллельна хорде $\overline{PQ}$ и, следовательно, параллельна вектору нормали $\vec{n}_M$ в точке M (эта касательная лежит в касательной плоскости в т. N). Но тогда вектор нормали $\vec{n}_N$ образует угол $\frac{\pi}{2}$ с $\vec{n}_M$, что противоречит выбору окрестности $\widetilde{M}$. Следовательно, утверждение леммы справедливо.

Лемма доказана.

Будем говорить, что часть Φ поверхности Φ имеет размер (или диаметр) меньше числа δ , если эта часть помещается внутри некоторого шара, диаметр которого меньше δ .

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Обозначение: $d(\tilde{\Phi}) < \delta$, $d(\tilde{\Phi}) = \sup_{\forall M, N, \in \tilde{\Phi}} \varrho(M, N)$.

Лемма 2. Пусть поверхность Φ удовлетворяет пяти условиям (*), кроме, быть может, двусторонности. Тогда существует такое число $\delta > 0$, что любая часть $\tilde{\Phi}$ поверхности Φ , размера $d(\tilde{\Phi}) < \delta$, однозначно проецируется на касательную плоскость к поверхности Φ , проходящую через произвольно зафиксированную точку этой части и однозначно проецируется хотя бы на одну из координатных плоскостей (в произвольно выбранной системе координат $Oxyz$).

Доказательство. Допустим, что утверждение леммы неверно ($\neg \exists \delta > 0$). Тогда для $\forall \delta_n = \frac{1}{n}$, можно указать часть $\Phi_n \subset \Phi$, $d(\Phi_n) < \delta_n$, которая не проецируется однозначно на касательную плоскость в некоторой своей точке или ни на одну из координатных плоскостей в некоторой системе $Oxyz$.

Выберем в каждой части Φ_n точку M_n и выделим из последовательности $\{M_n\}$ подпоследовательность M_{n_k} , сходящуюся к некоторой точке M_0 . Точка $M_0 \in \Phi$, так как Φ полная ограниченная поверхность (следовательно, существует такая подпоследовательность).

§1. Поверхность и ее основные свойства.

Рассмотрим окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 , удовлетворяющую условиям леммы 1. При достаточно больших номерах n_k эта окрестность будет содержать каждую часть Φ_{n_k} из подпоследовательности, т.к. $d(\Phi_{n_k}) \rightarrow 0$. Но тогда эта часть Φ_{n_k} должна проецироваться на касательную плоскость (в любой своей точке) и хотя бы на одну из координатных плоскостей в $\forall Oxyz$, что противоречит выбору частей Φ_{n_k} . Значит, $\exists \delta > 0$ и выполняется утверждение леммы.

Лемма доказана.

Лемма 3. Пусть поверхность Φ удовлетворяет пяти условиям (*). Тогда для $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что справедливо представление

$$\cos \gamma = 1 - \alpha_\Phi,$$

где $0 \leq \alpha_\Phi < \varepsilon$, для косинуса угла γ между единичными векторами нормалей в любых двух точках произвольной части $\widetilde{\Phi}$ поверхности Φ размера $< \delta$ ($\gamma = (\vec{n}_M, \vec{n}_N)$, $M, N \in \widetilde{\Phi}$).

Доказательство. На поверхности Φ существует непрерывное векторное поле единичных нормалей $\vec{n}(M)$. Векторная функция $\vec{n}$ равномерно непрерывна на Φ , так как Φ — компакт.

Следовательно, $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$: для любых точек $M, N \in \Phi$, $\varrho(M, N) < \delta$, выполняется оценка

$$|\vec{n}(M) - \vec{n}(N)| < \sqrt{2\varepsilon}. \quad (4)$$

Пусть $\gamma = \widehat{(\vec{n}_M, \vec{n}_N)}$, $M, N \in \Phi$, $\varrho(M, N) < \delta$. Так как

$$\cos \gamma = (\vec{n}_M, \vec{n}_N) = 1 - \frac{1}{2}(\vec{n}_M - \vec{n}_N)^2,$$

то полагая $\alpha_\Phi = \frac{1}{2}(\vec{n}_M - \vec{n}_N)^2$ и используя (4), получим $0 \leq \alpha_\Phi < \frac{1}{2}(\sqrt{2\varepsilon})^2 = \varepsilon \quad (\forall M, N \in \tilde{\Phi} \subset \Phi, d(\tilde{\Phi}) < \delta)$.
Лемма доказана.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§2. Площадь поверхности.

Пусть Φ – поверхность, удовлетворяющая пяти условиям (*) из §1. Разобьем Φ гладкими или кусочно-гладкими кривыми на конечное число n замкнутых частей Φ_i , $i = \overline{1, n}$ (без общих внутренних точек), каждая из которых однозначно проецируется на касательную плоскость к поверхности Φ , проходящую через произвольно зафиксированную точку этой части (по лемме 2 из §1 это можно сделать).

Обозначим $\delta_i = d(\Phi_i)$ – размер части $\Phi_i = \overline{\Phi_i}$, $\Delta = \max_{1 \leq i \leq n} \delta_i$ – диаметр разбиения поверхности Φ . Зафиксируем произвольную точку $M_i \in \Phi_i$, проведем касательную плоскость к Φ в точке M_i и обозначим проекцию части Φ_i на касательную плоскость в т. M_i через Ω_i , пусть $\sigma_i = |\Omega_i|$ – площадь проекции Φ_i (множества Ω_i имеют границы площади нуль, поэтому эти множества квадрируемы).

Составим сумму $\sum_{i=1}^n \sigma_i$ всех этих площадей.

§2. Площадь поверхности.

Определение 1. Число σ называется *пределом сумм* $\sum_i \sigma_i$

при диаметре разбиения $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для всех разбиений Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i , для которых $\Delta < \delta$, независимо от выбора точек M_i на частях Φ_i , выполняется неравенство

$$\left| \sum_{i=1}^n \sigma_i - \sigma \right| < \varepsilon; \quad \sigma = \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i.$$

Определение 2. Если для поверхности Φ существует предел σ сумм $\sum_i \sigma_i$ при $\Delta \rightarrow 0$, то поверхность называется

квадрируемой, а число σ называется *площадью поверхности*. Обозначим $\sigma = |\Phi|$.

Теорема 2. Поверхность Φ , удовлетворяющая пяти условиям (*) из §1 – квадрируема. Если существует $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – единое параметрическое векторное уравнение поверхности, $\vec{r}$ – гладкая функция в G , $G = \overline{G}$ – замкнутое ограниченное квадрируемое множество в плоскости переменных (u, v) , то ее площадь σ может быть вычислена по формуле

§2. Площадь поверхности.

$$\sigma = |\Phi| = \iint_G \left| \left[\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}, \frac{\partial \vec{r}}{\partial v} \right] \right| du dv \equiv I. \quad (1)$$

Доказательство. 1. Пусть на поверхности Φ задана единая параметризация. Тогда $\vec{r}(M) = \vec{r}(u, v)$ – гладкая функция, заданная в некотором замкнутом ограниченном множестве G на плоскости переменных (u, v) , $\vec{r}_u, \vec{r}_v$ – непрерывные векторные функции, не зависящие от выбора декартовой прямоугольной системы координат в E^3 (векторы не зависят от выбора системы координат). Поэтому значение I интеграла в правой части формулы (1) не зависит от выбора декартовой системы координат в E^3 . Этот интеграл I существует, так как $[\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ – непрерывная функция в G . Докажем, что Φ квадрируема, а ее площадь $\sigma = |\Phi| = I$.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$. Найдем число $\delta > 0$ исходя из следующих требований:

1) любая часть Φ_i поверхности Φ , такая, что $d(\Phi_i) < \delta$, проецируется однозначно на касательную плоскость к Φ в любой точке части Φ_i ;

§2. Площадь поверхности.

2) косинус угла γ между единичными векторами нормалей в любых двух точках части Φ_i может быть представлен в виде $\cos \gamma = 1 - \alpha_i$, где $0 \leq \alpha_i < \min\{1; \varepsilon I\}$.

Возможность выбора такого δ следует из лемм 2, 3.

Рассмотрим произвольное разбиение поверхности Φ кусочно-гладкими кривыми на конечное число замкнутых частей Φ_i , $i = \overline{1, n}$ без общих внутренних точек, так, чтобы диаметр разбиения $\Delta < \delta$. Этому разбиению отвечает разбиение множества G на части $G_i = \overline{\Phi_i}$. На каждой части Φ_i выбираем произвольно точку M_i и обозначим через $\sigma_i = |\Omega_i|$ – площадь проекции Φ_i на касательную плоскость к Φ в точке M_i . Составим сумму $\sum_i \sigma_i$.

Для вычисления σ_i поступим следующим образом.

Выберем систему координат $O_i xyz$, связанную с Φ_i так, что ее начало O_i совпадает с т. M_i , ось $O_i z$ направим по вектору нормали $\vec{n}_{M_i}$, а оси $O_i x$, $O_i y$ расположим в касательной плоскости. В этой системе координат поверхность определяется параметрическими уравнениями $x = x(u, v)$, $y = y(u, v)$, $z = z(u, v)$, $(u, v) \in G_i$, а вектор $\vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v]$ имеет координаты

§2. Площадь поверхности.

$$\{A, B, C\}: \quad \vec{N} = [\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ x_u & y_u & z_u \\ x_v & y_v & z_v \end{vmatrix} = \{A, B, C\}, \text{ где}$$

$$A = \begin{vmatrix} y_u & z_u \\ y_v & z_v \end{vmatrix}, \quad B = \begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}, \quad C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}.$$

Для точек Φ_i , по выбору числа δ и ориентации оси $O_i z$, величина $C > 0$ (см. условие 2)):

$\vec{n}_M = \left\{ \frac{A}{\|\vec{r}_u, \vec{r}_v\|}, \frac{B}{\|\vec{r}_u, \vec{r}_v\|}, \frac{C}{\|\vec{r}_u, \vec{r}_v\|} \right\}$ – единичный вектор нормали, его координаты – направляющие косинусы, $\cos \gamma = \frac{C}{\|\vec{r}_u, \vec{r}_v\|}$,

$\gamma = (\widehat{\vec{n}_M, O_i z}) = (\widehat{\vec{n}_M, \vec{n}_{M_i}})$, следовательно, по условию 2) $\cos \gamma = 1 - \alpha_i$, $0 \leq \alpha_i < 1$, поэтому $\cos \gamma > 0$ и $C > 0$.

С другой стороны, $C = \begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix} = \frac{D(x,y)}{D(u,v)} > 0$, для любой точки $M \in \Phi_i$, – якобиан преобраз-я переменных (x, y) в (u, v) . Воспользуемся ф-лой замены переменных в двойном интеграле.

Разобьем интеграл I в (1) на сумму интегралов A_i по множествам G_i , $I = \sum_{i=1}^n A_i$.

§2. Площадь поверхности.

Преобразуем независящий от выбора системы координат O_ixyz интеграл A_i : $A_i = \iint_{G_i} |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| dudv =$

$$\iint_{G_i} C \cdot \frac{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}{C} dudv = \iint_{G_i} \frac{1}{\cos \gamma} \cdot \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv.$$

Применим формулу среднего значения, а затем формулу замены переменных:

$$A_i = \frac{1}{\cos \gamma|_{\widehat{M}_i}} \iint_{G_i} \frac{D(x,y)}{D(u,v)} dudv = \frac{1}{\cos \gamma|_{\widehat{M}_i}} \iint_{\Omega_i} 1 dxdy = \frac{1}{\cos \gamma|_{\widehat{M}_i}} \sigma_i.$$

Таким образом, $\sigma_i = A_i \cdot \cos \gamma|_{\widehat{M}_i} = A_i(1 - \alpha_i) = A_i - A_i\alpha_i$.

Просуммируем: $\sum_{i=1}^n \sigma_i = \sum_{i=1}^n A_i - \sum_{i=1}^n A_i\alpha_i$, окончательно

получаем (используем условие 2) на разбиения):

$$\left| \sum_{i=1}^n \sigma_i - I \right| = \sum_{i=1}^n A_i\alpha_i < \frac{\varepsilon}{I} \sum_{i=1}^n A_i = \frac{\varepsilon}{I} I = \varepsilon, \quad \forall M_i \in \Phi_i,$$

следовательно, $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \sum_{i=1}^n \sigma_i = I$, поверхность Φ квадратуема и

ее площадь $\sigma = I$. Формула (1) доказана. *Первая часть теоремы доказана.*

§2. Площадь поверхности.

2. Если всю поверхность Φ нельзя задать одним уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$, то в общем случае, согласно лемме 2, Φ можно разбить на конечное число частей, каждая из которых однозначно проецируется на одну из координатных плоскостей, следовательно, описывается одним векторным уравнением (является графиком дифференцируемой функции), допускает единую параметризацию. По доказанному в 1 части, каждая такая часть квадратуема и площадь всей поверхности Φ определяется как сумма площадей полученных частей. Формула (1) сохранится, но в правой части будет сумма интегралов по каждой части с параметризациями $\vec{r}_i = \vec{r}_i(u, v)$.
Теорема доказана.

Замечания. 1. Если в теореме 2 поверхность Φ кусочно-гладкая, т.е. составлена из конечного числа гладких поверхностей, которые удовлетворяют пяти условиям (*) из §1, то, очевидно, каждая часть квадратуема и площадь поверхности Φ определяется как сумма площадей гладких частей.

§2. Площадь поверхности.

2. Разные формы записи формулы (1).

а) Пусть $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$ – параметрическое уравнение поверхности.

Тогда $[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \{A, B, C\}$, $||[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|| = \sqrt{A^2 + B^2 + C^2}$ и

$$\sigma = \iint_G \sqrt{A^2 + B^2 + C^2} du dv.$$

б) Пусть Φ – график непрерывно дифференцируемой функции $z = z(x, y)$. Тогда $\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$,

$$[\vec{r}_u, \vec{r}_v] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & z'_x \\ 0 & 1 & z'_y \end{vmatrix} = \{-z'_x, -z'_y, 1\} \text{ и}$$

$$\sigma = \iint_G \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y} dx dy.$$

в) Выразим модуль векторного произведения через скалярные величины: $\forall \vec{a}, \vec{b} \quad |[\vec{a}, \vec{b}]| = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sin \varphi =$

$$= |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sqrt{1 - \cos^2 \varphi} = |\vec{a}| \cdot |\vec{b}| \sqrt{1 - \left[\frac{(\vec{a}, \vec{b})}{|\vec{a}| \cdot |\vec{b}|} \right]^2} = \sqrt{\vec{a}^2 \vec{b}^2 - (\vec{a}, \vec{b})^2}.$$

Положим $\vec{a} = \vec{r}_u$, $\vec{b} = \vec{r}_v$. Обозначим $\vec{r}_u^2 = E$, $\vec{r}_v^2 = D$,

$$(\vec{r}_u, \vec{r}_v) = F, \text{ тогда } |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{\vec{r}_u^2 \vec{r}_v^2 - (\vec{r}_u, \vec{r}_v)^2} = \sqrt{ED - F^2}.$$

§2. Площадь поверхности.

Окончательно получим: $\sigma = \iint_G \sqrt{ED - F^2} \, dudv$.

3. Если посчитать площадь "кратной" поверхности с самоналеганием – рассмотренный ранее пример "слипшихся" кругов, – то формула (1) даст сумму площадей двух кругов.

4. Параметризация "листа Мёбиуса".

$$\begin{cases} x = r \cos u + v \sin \frac{u}{2} \cos u = (r + v \sin \frac{u}{2}) \cos u \\ y = r \sin u + v \sin \frac{u}{2} \sin u = (r + v \sin \frac{u}{2}) \sin u \\ z = v \cos \frac{u}{2} \end{cases}$$

$r > 0$ – параметр задачи, $u \in [0, 2\pi]$, $v \in [-1, 1]$.

Нарисуйте $Oxyz$, в плоскости Oxy – круг радиуса r , в точке $(r, 0, 0)$ изобразите вертикальный отрезок с концами в точках $(r, 0, -1)$, $(r, 0, 1)$ и вектор нормали к этому отрезку вдоль положительного направления оси Ox . Это положение отвечает значению $u = 0$: $x = r, y = 0, z = v \in [-1, 1]$, см. формулы. Двигайте этот отрезок по кругу и следите за направлением нормали, жёстко связанной с отрезком. Нарисуйте этот отрезок для случаев $u = \frac{\pi}{2}, \pi, \frac{3\pi}{2}, 2\pi$ (подставляем значения u в формулы для x, y, z).

§2. Площадь поверхности.

В итоге получите, что отрезок в конце пути перевернется и вектор нормали будет направлен вдоль оси Ox , но к началу координат. Это иллюстрирует отсутствие на поверхности непрерывного в целом вектрного поля нормалей.

Мы изучили основные свойства поверхностей. Теперь можем ввести понятие интеграла по поверхности.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§3. Поверхностные интегралы.

Пусть поверхность Φ удовлетворяет пяти условиям (*) из §1. Введем в E^3 систему координат $Oxyz$, выберем вектор $\vec{n}_M$ – ориентация поверхности, $\vec{n}_M = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$ в системе $Oxyz$. Пусть на Φ заданы четыре функции $f(x, y, z) = f(M)$, $P(M)$, $Q(M)$, $R(M)$, непрерывные на множестве точек Φ (след-но, равномерно непрерывные, так как Φ – компакт).

Разобьем Φ гладкими или кусочно-гладкими кривыми на конечное число частичных замкнутых поверхностей $\Phi_i, i = \overline{1, n}$, без общих внутренних точек, размер $\Phi_i - d(\Phi_i)$, диаметр разбиения – Δ . Выбираем на Φ_i произв. точку M_i , $\vec{n}_{M_i} = \{\cos X_i, \cos Y_i, \cos Z_i\}$. Обозначим $\sigma_i = |\Phi_i|$ – площадь Φ_i .

Составим четыре интегральные суммы: $\Sigma_1 = \sum_{i=1}^n f(M_i)\sigma_i$,

$$\Sigma_2 = \sum_{i=1}^n P(M_i)(\cos X_i)\sigma_i, \quad \Sigma_3 = \sum_{i=1}^n Q(M_i)(\cos Y_i)\sigma_i,$$

$$\Sigma_4 = \sum_{i=1}^n R(M_i)(\cos Z_i)\sigma_i,$$

§3. Поверхностные интегралы.

Определение. Число $I_s, s = \overline{1,4}$, называется пределом сумм Σ_s при $\Delta \rightarrow 0$, если $\forall \varepsilon > 0 \exists \delta > 0$, что для любого разбиения Φ на части Φ_i так, что $\Delta < \delta$ и при произвольном выборе точек M_i : $|\Sigma_s - I_s| < \varepsilon$.

Определение. Если существует предел I_1 сумм Σ_1 при $\Delta \rightarrow 0$, то этот предел называется *поверхностным интегралом первого рода* от функции $f(M)$ вдоль (по) поверхности Φ и обозначается $I_1 = \iint_{\Phi} f(M) d\sigma$.

Определение. Если существуют пределы сумм $\Sigma_s, s = 2, 3, 4$, при $\Delta \rightarrow 0$, то эти пределы называются *поверхностными интегралами второго рода* от функций P, Q, R , соответственно, по поверхности Φ и обозначаются соответственно $I_2 = \iint_{\Phi} P(M) \cos X d\sigma, I_3 = \iint_{\Phi} Q(M) \cos Y d\sigma, I_4 = \iint_{\Phi} R(M) \cos Z d\sigma$. Сумма $I_2 + I_3 + I_4 = I$ называется *общим поверхностным интегралом второго рода* и обозначается $I = \iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma = \iint_{\Phi} (\vec{A}, \vec{n}) d\sigma$, $\vec{A} = \vec{A}(x, y, z) = \{P, Q, R\}, \vec{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$ – вектор единичной нормали к Φ .

§3. Поверхностные интегралы.

Из определения поверхностных интегралов следует, что

1. Поверхностный интеграл первого рода не зависит от выбора стороны поверхности и не меняется при изменении направления вектора нормали на противоположное, а поверхностные интегралы второго рода меняют знак на противоположный при изменении направления вектора нормали на противоположное. Рассматриваем "ориентированные" поверхности.

2. Поверхностный интеграл первого рода и общий поверхностный интеграл второго рода не зависят от выбора декартовой системы координат и инвариантны относительно перехода к новым координатам.

Замечания. 1. Физически общий поверхностный интеграл второго рода представляет собой поток вектора $\vec{A}$ через поверхность Φ , а поверхностный интеграл первого рода дает массу нагруженной поверхности Φ , при условии, что поверхностная плотность распределения массы равна $f(M)$.

2. В случае, если поверхность Φ – замкнутая, то вектор нормали всегда считают направленным во внешность области, ограниченной поверхностью.

3. Каждый из поверхностных интегралов второго рода можно рассматривать как поверхностный интеграл первого рода от функции $P(M) \cos X$ и т.д.

Теорема 3. Если поверхность Φ удовлетворяет пяти условиям (*) из §1, задается уравнением $\vec{r} = \vec{r}(u, v)$:

$$x = x(u, v), \quad y = y(u, v), \quad z = z(u, v), \quad (u, v) \in G,$$

G – ограниченное замкнутое квадратируемое множество, $\vec{r}(u, v)$ – гладкая функция в G , а функции f, P, Q, R непрерывны вдоль Φ , то каждый из поверхностных интегралов $I_1 - I_4$ существует и сводится к обычному двойному интегралу по формуле

$$\begin{aligned} I_1 &= \iint_{\Phi} f(M) d\sigma = \\ &= \iint_G f(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{ED - F^2} du dv \equiv I_0, \end{aligned} \quad (1)$$

§3. Поверхностные интегралы.

$$\begin{aligned} I_2 &= \iint_{\Phi} P(M) \cos X d\sigma = \\ &= \iint_G P(x(u, v), y(u, v), z(u, v)) \sqrt{ED - F^2} \cos X dudv, \end{aligned}$$

и т.д. ($I_3 = \dots, I_4 = \dots$).

Доказательство. Достаточно доказать существование интеграла I_1 и справедливость равенства (1), так как все поверхностные интегралы второго рода сводятся к этому интегралу.

Обозначим интеграл в правой части формулы (1) через I_0 . Он существует, так как подинтегральная функция непрерывная. Достаточно доказать, что $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Sigma_1 = I_0$.

Как и при введении поверхностных интегралов производим разбиение $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$, Δ – диаметр разбиения, $G = \bigcup_{i=1}^n G_i$.

Зафиксируем $\forall \varepsilon > 0$ (пока $\forall \Delta$) и оценим разность $\Sigma_1 - I_0$, разбив интеграл I_0 на сумму интегралов по множествам G_i :

§3. Поверхностные интегралы.

$$\begin{aligned}\Sigma_1 - I_0 &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \sigma_i - \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} f(M) \sqrt{ED - F^2} \, dudv = \\ &= \sum_{i=1}^n f(M_i) \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2} \, dudv - \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} f(M) \sqrt{ED - F^2} \, dudv = \\ &= \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} (f(M_i) - f(M)) \sqrt{ED - F^2} \, dudv.\end{aligned}$$

Так как функция $f(M)$ равномерно непрерывна на Φ , то для зафиксированного $\varepsilon > 0 \exists \delta > 0 : \forall M, M_i \in \Phi, \varrho(M, M_i) < \delta, |f(M) - f(M_i)| < \frac{\varepsilon}{\sigma}, \quad \sigma = |\Phi|$ – площадь поверхности Φ .

Пусть диаметр разбиения $\Delta < \delta$. Тогда

$$\begin{aligned}|\Sigma_1 - I_0| &< \frac{\varepsilon}{\sigma} \sum_{i=1}^n \iint_{G_i} \sqrt{ED - F^2} \, dudv = \frac{\varepsilon}{\sigma} \iint_G \sqrt{ED - F^2} \, dudv = \\ &= \frac{\varepsilon}{\sigma} \cdot \sigma = \varepsilon.\end{aligned}$$

Таким образом, $\exists \lim_{\Delta \rightarrow 0} \Sigma_1 = I_0$. Теорема доказана.

§3. Поверхностные интегралы.

Следствие. Пусть выполняются условия теоремы 3. Пусть поверхность Φ задана уравнением $z = z(x, y)$, $(x, y) \in G$, т.е. Φ является графиком функции $z = z(x, y)$, и пусть $z(x, y)$ – гладкая функция на G . В этом случае $\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$. Выберем вектор нормали $\vec{n}_M$ так, чтобы он составлял острый угол с осью OZ . Получим (используем результат теоремы 3)

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z d\sigma &= \iint_G R(x, y, z(x, y)) \cos Z \sqrt{ED - F^2} dx dy = \\ &= \iint_G R(x, y, z(x, y)) dx dy, \end{aligned}$$

так как $d\sigma = |[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| du dv = \sqrt{ED - F^2} dx dy$,
 $\cos Z = + \frac{C}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|} = \frac{1}{|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]|}.$

Напомним, что в данном случае $C = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1,$

$$|[\vec{r}_u, \vec{r}_v]| = \sqrt{ED - F^2} = |\{-z'_x, -z'_y, 1\}| = \sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}.$$

Это оправдывает обозначение

$$\iint_{\Phi} R(x, y, z) \cos Z d\sigma = \iint_{\Phi} R(x, y, z) dx dy,$$

и вообще, для любой поверхности Φ используют следующую запись общего поверхностного интеграла второго рода:

$$\iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma = \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy.$$

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

Глава 7. Основные операции теории поля.

§1. Дивергенция и ротор линейного оператора.

В этой главе будут рассматриваться скалярные и векторные поля в пространстве E^3 .

Пусть в пространстве E^3 даны два базиса $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$ и $\vec{r}^1, \vec{r}^2, \vec{r}^3$. Эти базисы наз. *биортогональными (взаимными)*,

если $(\vec{r}_i, \vec{r}^k) = \delta_i^k = \begin{cases} 1, & i = k \\ 0, & i \neq k \end{cases}, i, k = \overline{1, 3}.$

Утверждение 1. *Для всякого базиса $\{\vec{r}_i\}$ существует и причем единственный биортогональный базис, определяемый соотношениями*

$$\vec{r}^1 = \frac{[\vec{r}_2, \vec{r}_3]}{(\vec{r}_1, [\vec{r}_2, \vec{r}_3])}, \quad \vec{r}^2 = \frac{[\vec{r}_3, \vec{r}_1]}{(\vec{r}_2, [\vec{r}_3, \vec{r}_1])}, \quad \vec{r}^3 = \frac{[\vec{r}_1, \vec{r}_2]}{(\vec{r}_3, [\vec{r}_1, \vec{r}_2])}.$$

В курсе линейной алгебры это утверждение было доказано для произвольного пространства E^n .

§1. Дивергенция и ротор линейного оператора.

Формулы перехода от одной пары биортогональных базисов к другой. Пусть от биортогональных базисов $\{\vec{r}_i, \vec{r}^i\}$ переходим к новой паре биортогональных базисов $\{\vec{r}_{i'}, \vec{r}^{i'}\}$, так что

$$\vec{r}_{i'} = b_{i'}^i \vec{r}_i, \quad \vec{r}_i = b_i^{i'} \vec{r}_{i'}, \quad (1)$$

$$\vec{r}^{i'} = \tilde{b}_i^{i'} \vec{r}^i, \quad \vec{r}^i = \tilde{b}_{i'}^i \vec{r}^{i'}, \quad (2)$$

здесь использована запись (при совпадении верхнего и нижнего индексов, по ним происходит суммирование)

$$b_{i'}^i \vec{r}_i = \sum_{i=1}^3 b_{i'}^i \vec{r}_i = b_{i'}^1 \vec{r}_1 + b_{i'}^2 \vec{r}_2 + b_{i'}^3 \vec{r}_3.$$

Ясно, что матрицы $(b_{i'}^i)$ и $(b_i^{i'})$ – взаимно обратные, и $(\tilde{b}_i^{i'})$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$ – взаимно обратные. Убедимся в том, что матрицы $(b_{i'}^i)$ и $(\tilde{b}_{i'}^i)$ совпадают, т.е. волну можно убрать. Отсюда будет автоматически следовать, что и обратные им матрицы совпадают: $(b_{i'}^i) = (\tilde{b}_{i'}^i)$.

Умножим первое из равенств (1) скалярно на $\vec{r}^k$, а второе из равенств (2) – на $\vec{r}_{k'}$, используем линейность скалярного произведения по каждому аргументу, получим

§1. Дивергенция и ротор линейного оператора.

$$\begin{aligned}(\vec{r}_{i'}, \vec{r}^k) &= (b_{i'}^i \vec{r}_i, \vec{r}^k) = b_{i'}^i (\vec{r}_i, \vec{r}^k) = b_{i'}^i \delta_i^k = b_{i'}^k, \\(\vec{r}_{k'}, \vec{r}^i) &= (\vec{r}_{k'}, \tilde{b}_{i'}^i \vec{r}^{i'}) = \tilde{b}_{i'}^i (\vec{r}_{k'}, \vec{r}^{i'}) = \tilde{b}_{i'}^i \delta_{k'}^{i'} = \tilde{b}_{k'}^i.\end{aligned}$$

При $i' = k', i = k$ левые, а следовательно, и правые части равенств совпадают, т.е. $b_{i'}^i = \tilde{b}_{i'}^i$.

Таким образом, из (1), (2), с учетом доказанного, получим

$$\vec{r}_{i'} = b_{i'}^i \vec{r}_i, \quad \vec{r}^{i'} = b_{i'}^{i'} \vec{r}^i. \quad (3)$$

Рассмотрим линейный оператор $A: E^3 \rightarrow E^3$, оперирующий над векторами $\vec{r} \in E^3$: $\forall \vec{r}_1, \vec{r}_2, \forall \alpha, \beta \in \mathbb{R} \quad A(\alpha \vec{r}_1 + \beta \vec{r}_2) = \alpha A\vec{r}_1 + \beta A\vec{r}_2 \in E^3$.

Например, подходят операторы

$$A\vec{r} = \alpha \vec{r}, \quad A\vec{r} = [\vec{a}, \vec{r}], \quad \vec{a} = \text{const}, \quad A\vec{r} = (\vec{a}, \vec{r})\vec{a}.$$

Не подходят операторы

$$A\vec{r} = |\vec{r}|\vec{a}, \quad A\vec{r} = \vec{r} + \vec{a}, \quad \vec{a} \neq \vec{0}, \quad A\vec{r} = (\vec{a}, \vec{r}).$$

Утверждение 2. Для любой пары биортогональных базисов

$$\{\vec{r}_i, \vec{r}^i\} \text{ величина } \sum_{i=1}^3 (\vec{r}^i, A\vec{r}_i) = \sum_{i=1}^3 (\vec{r}_i, A\vec{r}^i) \text{ инвариантна}$$

относительно выбора базиса в пространстве и называется

§1. Дивергенция и ротор линейного оператора.

дивергенцией оператора A (divergence, расходимость).

Обозначение: $\text{div} A = (\vec{r}^i, A\vec{r}_i)$, краткая запись.

Доказательство. Рассмотрим любую другую пару биорт. базисов $\vec{r}_{i'}, \vec{r}^{i'}$. Тогда, используя соотношения (3), линейность оператора A и линейность скалярного произведения по каждому аргументу, получим

$$1) (\vec{r}^{i'}, A\vec{r}_{i'}) = (b_i^{i'} \vec{r}^i, A b_i^k \vec{r}_k) = b_i^{i'} b_i^k (\vec{r}^i, A\vec{r}_k) = \delta_i^k (\vec{r}^i, A\vec{r}_k) = (\vec{r}^i, A\vec{r}_i),$$

где использовано, что $b_i^{i'} \cdot b_i^k = \delta_i^k$, $(b_i^{i'})(b_j^k) = E$.

2) Вместо пары $\{\vec{r}_i, \vec{r}^i\}$ возьмем пару базисов $\{\vec{r}^i, \vec{r}_i\} = \{\vec{r}_{i'}, \vec{r}^{i'}\}$. Тогда, по установленному в 1), получим $(\vec{r}^i, A\vec{r}_i) = (\vec{r}_i, A\vec{r}^i)$. Утверждение доказано.

Утверждение 3. Для любой пары биортогональных базисов

$\{\vec{r}_i, \vec{r}^i\}$ величина $\sum_{i=1}^3 [\vec{r}^i, A\vec{r}_i] = \sum_{i=1}^3 [\vec{r}_i, A\vec{r}^i]$ инвариантна

относительно выбора базиса в пространстве и называется **ротором оператора** A (rotation, вращение).

Обозначение: $\text{rot} A = [\vec{r}^i, A\vec{r}_i]$, краткая запись.

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Доказательство. Для доказательства утверждения 3 достаточно в доказательстве утверждения 2 заменить скалярное произведение $(\cdot, \cdot)$ на векторное произведение $[\cdot, \cdot]$ и использовать свойство линейности векторного произведения по каждому аргументу. *Утверждение доказано.*

Задача. Пусть $A = I$ – тождественный оператор, $A\vec{r} = \vec{r}$. Вычислите $\operatorname{div} A, \operatorname{rot} A$.

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Рассмотрим векторное поле $\vec{p}(M) = \vec{p}(\vec{r})$, определенное в некоторой области $\Omega \subset E^3$, $\vec{r}$ – радиус-вектор точки M . Обозначим $\Delta\vec{p}(\vec{r})$ – приращение векторного поля, отвечающее приращению аргумента $\Delta\vec{r} = \overline{MM'}$, $M, M' \in \Omega$:

$$\Delta\vec{p}(M) = \Delta\vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(\vec{r} + \Delta\vec{r}) - \vec{p}(\vec{r}) = \vec{p}(M') - \vec{p}(M).$$

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Определение. Векторное поле $\vec{p}(\vec{r})$, определяемое векторной функцией, называется *дифференцируемым* в данной точке M (радиус-вектор $\vec{r} = \vec{r}_M$), если его приращение $\Delta\vec{p}$ в точке M , отвечающее приращению $\Delta\vec{r}$ вектора $\vec{r}$, может быть представлено в виде

$$\Delta\vec{p}(M) = A\Delta\vec{r} + o(|\Delta\vec{r}|), \quad (1)$$

где $A = A(M) = A(\vec{r})$ – линейный оператор, не зависящий от $\Delta\vec{r}$, $o(|\Delta\vec{r}|)$ – вектор такой, что $\frac{o(|\Delta\vec{r}|)}{|\Delta\vec{r}|} \rightarrow \vec{\theta}$ при $|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0$.

Например, $A = I$, если $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{r}$, возможно $A\Delta\vec{r} = \vec{r}(\Delta\vec{r}, \vec{r})$; $o(|\Delta\vec{r}|) : \vec{\theta}, |\Delta\vec{r}|^2, \vec{r}|\Delta\vec{r}|^\alpha, \alpha > 1, \vec{r}\Delta\vec{r}^2, \Delta\vec{r}(\vec{r}, \Delta\vec{r}), [\Delta\vec{r}, \vec{r}]\Delta\vec{r}^2$.

Утверждение 4. Если векторное поле дифференцируемо в т. M , то представл. (1) для приращения $\Delta\vec{p}$ в т. M единственно.

Доказательство. Пусть $\Delta\vec{p}(M) = A\Delta\vec{r} + o_1(|\Delta\vec{r}|)$, $\Delta\vec{p}(M) = B\Delta\vec{r} + o_2(|\Delta\vec{r}|)$, вычтем из первого равенства второе, $(A - B)\Delta\vec{r} = o(|\Delta\vec{r}|)$, $|\Delta\vec{r}| \neq 0$, делим на $|\Delta\vec{r}|$, обозначим $\frac{\Delta\vec{r}}{|\Delta\vec{r}|} = \vec{e}$ – единичный вектор, сонаправленный $\Delta\vec{r}$, $(A - B)\vec{e} = o(1) \rightarrow \vec{\theta}$ при $|\Delta\vec{r}| \rightarrow 0$.

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Следовательно, $(A - B)\vec{e} = \vec{\theta}$, $\forall \vec{e}$, а это означает, что $A = B$.
Утверждение доказано.

Определение. Векторное поле наз. *дифференцируемым на множестве*, если оно дифференцируемо в каждой точке этого множества.

Определение. *Дивергенцией* дифференцируемого векторного поля $\vec{p}$ называется дивергенция оператора A в представлении (1). Обозначение: $div\vec{p} = divA = (\vec{r}_i, A\vec{r}^i)$, где взята произвольная пара биортогональных базисов.

[Вопрос: $div\vec{r} = divI = \dots - ?$]

Определение. *Ротором* дифференцируемого векторного поля $\vec{p}$ называется ротор оператора A в представлении (1). Обозначение: $rot\vec{p} = rotA = [\vec{r}_i, A\vec{r}^i]$.

[Вопрос: $rot\vec{r} = rotI = \dots - ?$]

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Производная векторной функции (векторного поля) по направлению. Пусть векторное поле $\vec{p}(\vec{r})$ задано в области Ω . Зафиксируем произвольную точку $M \in \Omega$ и исходящий из нее единичный вектор $\vec{e}$. На луче, определяемом вектором $\vec{e}$, возьмем т. $M_1 \in \Omega$ и пусть $l = |\overline{MM_1}|$. Тогда $\Delta\vec{r} = \overline{MM_1} = \vec{r}_{M_1} - \vec{r}_M = l\vec{e}$, $|\Delta\vec{r}| = l$, получаем приращение $\Delta\vec{p}(M)$.

Определение. Если существует конечный предел при $l \rightarrow 0$ отношения $\frac{\Delta\vec{p}(M)}{l}$, то он называется *производной векторной функции $\vec{p}$ по направлению $\vec{e}$ в точке M* и обозначается символом $\frac{\partial\vec{p}}{\partial\vec{e}}(M) = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta\vec{p}(M)}{l}$.

Утверждение 5. Если векторное поле $\vec{p}(\vec{r})$ дифференцируемо в точке M , то производная $\frac{\partial\vec{p}}{\partial\vec{e}}(M)$ существует и определяется равенством

$$\frac{\partial\vec{p}}{\partial\vec{e}}(M) = A(M)\vec{e}, \quad (2)$$

где A – линейный оператор из условия (1) дифференцируемости в точке M .

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Доказательство. Подставим в равенство (1),

$$\Delta \vec{p}(M) = A \Delta \vec{r} + o(|\Delta \vec{r}|), \quad (1)$$

представление $\Delta \vec{r} = l \vec{e}$, получим

$$\Delta \vec{p} = l A \vec{e} + o(l).$$

Поделим равенство на l :

$$\frac{\Delta \vec{p}}{l} = A \vec{e} + \frac{o(l)}{l} = A \vec{e} + o(1) \rightarrow A \vec{e}$$

при $l \rightarrow 0$. Т.е. предел существует и справедливо равенство (2).

Утверждение доказано.

Далее получим представления введенных операций для векторных функций в ортонормированном базисе.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Формулы для дивергенции, ротора и производной по направлению дифференцируемого векторного поля в ортонормированном базисе (ОНБ).

Возьмем в E^3 ортонормированный базис i, j, k , тогда биортогональный базис с ним совпадает. С этим базисом свяжем систему координат $Oxyz$. Пусть в этом базисе векторное поле $\vec{p}$ имеет координаты $\vec{p} = Pi + Qj + Rk = \{P, Q, R\}$.

Все искомые величины выражаются через оператор A . Построим матрицу A этого оператора в ОНБ (Из курса алгебры: нужно подействовать оператором A на базисный вектор i и результат разложить по базису, из коэффициентов разложения получим первый столбец матрицы A , и т. д.).

Вспомним аналог формулы (2),

$$\frac{\partial \vec{p}(M)}{\partial \vec{e}} = A(M)\vec{e}, \quad (2)$$

для скалярной функции (скалярного поля) $f(M) = f(x, y, z)$.

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Введем обозначение для операции "градиент":

$$\nabla = \left\{ \frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right\}, \quad \text{grad } f \equiv \nabla f.$$

Тогда справедливо

$$\frac{\partial f(M)}{\partial \vec{e}} = \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta f(M)}{l} = (\vec{e}, \text{grad } f) = (\vec{e}, \nabla f).$$

Используя определения производных по направлению функций $\vec{p}$ и f , получаем

$$\begin{aligned} \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}} &= \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta \vec{p}}{l} = \left\{ \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta P}{l}, \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta Q}{l}, \lim_{l \rightarrow 0} \frac{\Delta R}{l} \right\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial \vec{e}}, \frac{\partial Q}{\partial \vec{e}}, \frac{\partial R}{\partial \vec{e}} \right\} = \\ &= \{(\vec{e}, \text{grad } P), (\vec{e}, \text{grad } Q), (\vec{e}, \text{grad } R)\}. \end{aligned}$$

Используем установленное соотношение и результат утверждения 5 – формулу (2):

$$Ai = \frac{\partial \vec{p}}{\partial i} = \{(i, \text{grad } P), (i, \text{grad } Q), (i, \text{grad } R)\} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x}, \frac{\partial R}{\partial x} \right\} = \frac{\partial \vec{p}}{\partial x}.$$

Следовательно, первый столбец матрицы A имеет вид

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

$\begin{pmatrix} P_x \\ Q_x \\ R_x \end{pmatrix}$. Аналогично получаем выражения для второго и

третьего столбцов матрицы A : $Aj = \frac{\partial \vec{p}}{\partial y} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial y}, \frac{\partial Q}{\partial y}, \frac{\partial R}{\partial y} \right\}$,

$Ak = \frac{\partial \vec{p}}{\partial z} = \left\{ \frac{\partial P}{\partial z}, \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial R}{\partial z} \right\}$. Таким образом, матрица A имеет вид

$$A = \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} & \frac{\partial P}{\partial z} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} & \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial R}{\partial x} & \frac{\partial R}{\partial y} & \frac{\partial R}{\partial z} \end{pmatrix}.$$

Приступаем к получению выражений для искомых операций в ОНБ. Используем результаты утверждений 3, 4, 5.

Дивергенция.

$$\begin{aligned} \operatorname{div} \vec{p} = \operatorname{div} A &= (i, Ai) + (j, Aj) + (k, Ak) = (i, \{P_x, Q_x, R_x\}) + \\ &+ (j, \{P_y, Q_y, R_y\}) + (k, \{P_z, Q_z, R_z\}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \equiv (\nabla, \vec{p}). \end{aligned}$$

Установлена формула расходимости векторного поля в ОНБ:

$$\operatorname{div} \vec{p} = (\nabla, \vec{p}) = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}.$$

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Ротор.

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \vec{p} = \operatorname{rot} A &= [i, Ai] + [j, Aj] + [k, Ak] = \begin{vmatrix} i & j & k \\ 1 & 0 & 0 \\ P_x & Q_x & R_x \end{vmatrix} + \\ &+ \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 1 & 0 \\ P_y & Q_y & R_y \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} i & j & k \\ 0 & 0 & 1 \\ P_z & Q_z & R_z \end{vmatrix} = \{0, -R_x, Q_x\} + \\ &+ \{R_y, 0, -P_y\} + \{-Q_z, P_z, 0\} = \{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\} = \\ &= \left(\frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \right) i + \left(\frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \right) j + \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) k \equiv \begin{vmatrix} i & j & k \\ \frac{\partial}{\partial x} & \frac{\partial}{\partial y} & \frac{\partial}{\partial z} \\ P & Q & R \end{vmatrix} \equiv \\ &\equiv [\nabla, \vec{p}]. \end{aligned}$$

Установлена формула ротора (вихря) векторного поля в ОНБ:

$$\operatorname{rot} \vec{p} = \left\{ \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z}, \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x}, \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right\} = [\nabla, \vec{p}].$$

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Используем полученные формулы для вычисления дивергенции и ротора простейшего векторного поля $\vec{p}(\vec{r}) = \vec{r} = \{x, y, z\}$. Ранее мы вычисляли эти величины, используя определения. Имеем: $P = x, Q = y, R = z$. Подставим в формулы:

$$\operatorname{div} \vec{r} = \operatorname{div} \{x, y, z\} = \frac{\partial x}{\partial x} + \frac{\partial y}{\partial y} + \frac{\partial z}{\partial z} = 3,$$

$$\operatorname{rot} \vec{r} = \left\{ \frac{\partial z}{\partial y} - \frac{\partial y}{\partial z}, \frac{\partial x}{\partial z} - \frac{\partial z}{\partial x}, \frac{\partial y}{\partial x} - \frac{\partial x}{\partial y} \right\} = \vec{0}.$$

Отметим, что если векторное поле определено в некоторой области $\Omega \subset E^3$, то операция $\operatorname{div} \vec{p}$ порождает в области Ω скалярное поле, а операция $\operatorname{rot} \vec{p}$ порождает в области Ω векторное поле, — инварианты относительно выбора базиса в пространстве E^3 .

§2. Дивергенция, ротор и производная по направлению дифференцируемого векторного поля.

Производная по направлению. Найдем выражение для производной по направлению $\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}} = A\vec{e}$ (согласно утверждению 5) в ОНБ. Пусть в базисе i, j, k единичный вектор $\vec{e}$ имеет координаты $\vec{e} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. Имеем,

$$\begin{aligned}\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}} &= A\vec{e} = \begin{pmatrix} P_x & P_y & P_z \\ Q_x & Q_y & Q_z \\ R_x & R_y & R_z \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos \alpha \\ \cos \beta \\ \cos \gamma \end{pmatrix} = \\ &= \begin{pmatrix} P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta + P_z \cos \gamma \\ Q_x \cos \alpha + Q_y \cos \beta + Q_z \cos \gamma \\ R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma \end{pmatrix} = \{P_x \cos \alpha + P_y \cos \beta + \\ &+ P_z \cos \gamma, Q_x \cos \alpha + Q_y \cos \beta + Q_z \cos \gamma, \\ &R_x \cos \alpha + R_y \cos \beta + R_z \cos \gamma\} = \{(\nabla P, \vec{e}), (\nabla Q, \vec{e}), (\nabla R, \vec{e})\}.\end{aligned}$$

Производная по направлению порождает векторное поле в области Ω .

§3. Повторные операции теории поля.

Пусть в области Ω заданы скалярное поле $u(M)$ и векторное поле $\vec{p}(M)$, каждое из которых два раза непрерывно дифференцируемо (производная векторного поля по любому направлению является непрерывно дифференцируемой функцией или функции P, Q, R – два раза непрерывно дифференцируемые). Тогда $\text{grad } u$ – дифференцируемое векторное поле в Ω , $\text{div } \vec{p}$ – дифференцируемое скалярное поле в Ω , $\text{rot } \vec{p}$ – дифференцируемое векторное поле в Ω . Возможны следующие пять повторных операций:

$$\begin{aligned} \text{rot grad } u, \quad \text{div grad } u, \\ \text{grad div } \vec{p}, \\ \text{div rot } \vec{p}, \quad \text{rot rot } \vec{p}. \end{aligned}$$

Выясним, что из себя представляют эти повторные операции.

1) Докажем, что

$$\text{rot grad } u = 0, \quad \text{div rot } \vec{p} = 0.$$

Все величины, входящие в эти формулы инвариантны относительно выбора базиса, поэтому достаточно показать,

§3. Повторные операции теории поля.

что в ОНБ справедливы указанные равенства. Отсюда будет следовать, что и в общем случае эти равенства будут верны.

Пусть в ОНБ $\vec{p} = \{P, Q, R\}$, $u(M) = u(x, y, z)$. Тогда $\text{grad } u = \{u_x, u_y, u_z\}$, $\text{rot } \vec{p} = \{R_y - Q_z, P_z - R_x, Q_x - P_y\}$. Вычислим повторную операцию:

$$\text{rot grad } u = \{u_{zy} - u_{yz}, u_{xz} - u_{zx}, u_{yx} - u_{xy}\} = \vec{0}.$$

Далее, $\text{div } \vec{p} = P_x + Q_y + R_z$. Вычислим вторую повторную операцию:

$$\begin{aligned} \text{div rot } \vec{p} &= \frac{\partial}{\partial x}(R_y - Q_z) + \frac{\partial}{\partial y}(P_z - R_x) + \frac{\partial}{\partial z}(Q_x - P_y) = \\ &= R_{yx} - Q_{zx} + P_{zy} - R_{xy} + Q_{xz} - P_{yz} = 0. \end{aligned}$$

2) Следующая операция $\text{div grad } u \equiv \Delta u$ называется оператором Лапласа. В ОНБ для этого оператора получим

$$\Delta u = u_{xx} + u_{yy} + u_{zz} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}.$$

3) Покажите самостоятельно, что

$$\operatorname{rot} \operatorname{rot} \vec{p} = \operatorname{grad} \operatorname{div} \vec{p} - \Delta \vec{p},$$

где $\Delta \vec{p}$ – векторный оператор Лапласа, в ОНБ справедливо $\Delta \vec{p} = \{\Delta P, \Delta Q, \Delta R\}$.

Пример. Пусть $\vec{p}$ – векторное поле скоростей установившегося течения несжимаемой жидкости. Тогда дивергенция (расходимость) векторного поля, $\operatorname{div} \vec{p}$, характеризует интенсивность источников (если $\operatorname{div} \vec{p} > 0$) или стоков (если $\operatorname{div} \vec{p} < 0$); ротор (вихрь) векторного поля, $\operatorname{rot} \vec{p} = 2\vec{\omega}$, равен удвоенной угловой скорости вращения точки. Т.е. $\operatorname{rot} \vec{p}$ – векторная вращательная составляющая поля $\vec{p}$.

Далее выведем интегральные формулы анализа.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

§4. Интегральные формулы анализа.

Из курса Математический анализ I.

Эффективные формулы.

Формула Ньютона-Лейбница: $\int_a^b f'(x)dx = f(b) - f(a).$

Формула интегрирования по частям:

$$\int_a^b [u(x)v'(x) + u'(x)v(x)]dx = \int_a^b (uv)'dx = u(b)v(b) - u(a)v(a).$$

Т.е. интеграл по отрезку выражается через значения функций в граничных точках этого отрезка.

Есть ли аналоги этих формул для плоского множества, объемного множества, для интеграла по поверхности?
Изучим этот вопрос.

1°. Формула Грина.

Пусть π – плоскость в пространстве E^3 , k – единичный вектор нормали к π , D – ограниченная односвязная область на π , удовлетворяющая двум условиям:

- 1) граница $C = \partial D$ является замкнутой гладкой кривой без особых точек;
- 2) декартову систему координат Oxy на плоскости π можно выбрать так, что для каждой из осей Ox, Oy , любая прямая, параллельная оси, пересекает C не более, чем в двух точках.

Теорема 1. Пусть область D удовлетворяет указанным требованиям, $\vec{t}$ – единичный вектор касательной к кривой C , согласованный с вектором k (т.е. положительное направление обхода C совпадает с направлением касательной), векторное поле $\vec{p}(\vec{r})$ определено и непрерывно в $\overline{D} = D \cup C$, дифференцируемо в D и производная по любому направлению непрерывна в $\overline{D}$ ($\forall \vec{e}: \frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}}$ – непрерывна в $\overline{D}$). Тогда

$$\iint_{\overline{D}} (k, \operatorname{rot} \vec{p}) d\sigma = \oint_C (\vec{p}, \vec{t}) dl, \quad (1)$$

§4. Интегральные формулы анализа.

– формула Грина в инвариантной форме (относительно выбора базиса).

Оба интеграла в формуле (1) существуют, так как подинтегральные функции непрерывны.

Физический смысл формулы: поток вектора $\operatorname{rot} \vec{p}$ (вихря поля $\vec{p}$) через множество $\bar{D}$ (поток тепла, жидкости) равен циркуляции вектора $\vec{p}$ по замкнутому контуру (т.е. работа сил поля $\vec{p}$ по перемещению материальной точки вдоль C).

Направление обхода контура и сторона поверхности должны соответствовать друг другу.

Доказательство. Формула (1) инвариантна относительно выбора базиса (декартовой системы координат). Достаточно доказать ее при каком-либо одном выборе. Выберем систему координат Oxy так, чтобы выполнялось условие 2) на область D , ось Oz направим по вектору k .

Получим выражение для формулы (1) в ОНБ.

Запишем координаты векторов из (1). $k = \{0, 0, 1\}$, $\vec{p}(M) = \vec{p}(x, y) = \{P(x, y), Q(x, y), R(x, y)\}$, $\vec{t} = \{\cos \alpha, \cos \beta, 0\}$.

Тогда $(k, \operatorname{rot} \vec{p}) = \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}$, $d\sigma = dx dy$, так как множество D

§4. Интегральные формулы анализа.

находится в плоскости, $z = z(x, y) = 0$, поэтому

$d\sigma = \sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2} dx dy = dx dy$. Подставим выписанные соотношения в (1), получим

$$\iint_{\overline{D}} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = \oint_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl = \oint_C P dx + Q dy \quad (2)$$

– формула Грина в ОНБ.

Последнее равенство в формуле (2) объясним позже, в лемме после доказательства теоремы.

Достаточно доказать формулу (2) "покомпонентно":

$$I = - \iint_{\overline{D}} \frac{\partial P}{\partial y} dx dy = \oint_C P dx; \quad \iint_{\overline{D}} \frac{\partial Q}{\partial x} dx dy = \oint_C Q dy.$$

Докажем первое равенство (для P), второе доказывается аналогично.

Прямая, параллельная оси Oy , пересекает контур C не более, чем в двух точках, обозначим их $y_1(x)$, $y_2(x)$, $y_1(x) \leq y_2(x)$.

§4. Интегральные формулы анализа.

Пусть $[x_1, x_2]$ – проекция множества $\overline{D}$ на ось Ox . Применим формулу сведения двойного интеграла к повторному и теорему о вычислении криволинейных интегралов ($x = t, \varphi'(t) = 1$).

Разбиваем кривую $C = C_1 \cup C_2$, $C_1 : y = y_1(x)$, $C_2 : y = y_2(x)$.

Учтем, что когда точка x "пробегает" отрезок $[x_1, x_2]$, точка $(x, y_1(x))$ движется по кривой C_1 в положительном направлении, а точка $(x, y_2(x))$ движется по кривой C_2 в отрицательном направлении, т.е. по кривой C_2^- .

Получим

$$\begin{aligned} I &= - \int_{x_1}^{x_2} dx \int_{y_1(x)}^{y_2(x)} \frac{\partial P(x, y)}{\partial y} dy = \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_1(x)) dx - \int_{x_1}^{x_2} P(x, y_2(x)) dx = \\ &= \int_{C_1} P(x, y) dx - \left(- \int_{C_2} P(x, y) dx \right) = \oint_C P(x, y) dx, \end{aligned}$$

это доказывает формулу (2) для компоненты P . Таким образом формула (2), а следовательно, и формула (1) доказаны.

Теорема доказана.

Замечания. 1. Можно рассматривать множества D такие, что с помощью кусочно-гладких кривых их можно разбить на конечное число частей D_i , удовлетворяющих условиям 1), 2) теоремы 1. По каждой части D_i формула (1) верна. В силу свойства аддитивности двойного интеграла, справедливо $\sum_i \iint_{\overline{D_i}} = \iint_{\overline{D}}$, а $\sum_i \oint_{C_i} = \oint_C$, где C – общая граница D . Интегралы по внутренним границам взаимно уничтожаются, так как мы имеем криволинейные интегралы второго рода, а направление движения по внутренним границам – противоположное (так, чтобы для каждой части D_i движение по C_i осуществлялось в положительном направлении). Таким образом, и в этом случае формула Грина (1) имеет место.

2. Можно рассматривать области D с кусочно-гладкой границей без особых точек, т.е. от условия 2) можно отказаться, формула (1) остается верной (трудности доказательства многократно увеличиваются).

3. Условия на векторное поле можно ослабить. Функция $\vec{p}$ непрерывна в $\overline{D}$, дифференцируема в D , производная по направлению непрерывна в D , $\forall \vec{e}$. Формула (1) верна, но интеграл в левой части – несобственный, берется по открытому множеству D (доказательство см. в учебнике В.А. Ильина, Э.Г. Позняка).

4. Формула Грина (1) остается верной и в случае произвольной области D со спрямляемой границей C (доказательство см. в статье Позняк Э.Г., Шикин Е.В. Доклады АН СССР, 1980, т. 253, № 1, с. 42 – 44).

§4. Интегральные формулы анализа.

Вернемся к доказательству формулы Грина. Проведем обоснование перехода от криволинейного интеграла второго рода к криволинейному интегралу первого рода в последнем равенстве формулы (2).

Рассмотрим гладкую кривую $C = \smile AB$ и выберем в качестве параметра длину дуги $t = |\smile AM|$, $M \in C$ ("естественная" параметризация кривой). Представим кривую C уравнениями

$$x = x(t), \quad y = y(t), \quad 0 \leq t \leq L, \quad L = |\smile AB|.$$

Функции $x = x(t)$, $y = y(t)$ имеют непрерывные производные $x'(t)$, $y'(t)$. Обозначим через α угол, составленный с осью Ox касательной $\vec{a}$ к кривой C , направленной в сторону возрастания дуг (роста t). Пусть β – дополнение угла α до $\frac{\pi}{2}$. Имеет место следующее утверждение.

Лемма. $\cos \alpha = x'(t)$, $\sin \alpha = \cos \beta = y'(t)$, $t \in [0, L]$.

Доказательство. Пусть точке M отвечает значение t длины дуги. Придадим приращение (положительное) Δt , тогда $t + \Delta t$ определяет точку $M_1 \in C$, лежащую от M в сторону возрастания дуг.

§4. Интегральные формулы анализа.

Обозначим через α' – угол, который составляет секущая $\overrightarrow{MM_1}$ (это ее направление) и положительное направление оси Ox .

Приращению Δt отвечают приращения $\Delta x, \Delta y$, имеем $\Delta x = |\overrightarrow{MM_1}| \cos \alpha'$, $\Delta y = |\overrightarrow{MM_1}| \sin \alpha'$, отсюда $\cos \alpha' = \frac{\Delta x}{|\overrightarrow{MM_1}|}$, $\sin \alpha' = \frac{\Delta y}{|\overrightarrow{MM_1}|}$. Так как $\Delta t = |\sphericalangle MM_1|$, то

$$\cos \alpha' = \frac{\Delta x}{\Delta t} \cdot \frac{|\sphericalangle MM_1|}{|\overrightarrow{MM_1}|}, \quad \sin \alpha' = \frac{\Delta y}{\Delta t} \cdot \frac{|\sphericalangle MM_1|}{|\overrightarrow{MM_1}|}.$$

Но $\frac{|\sphericalangle MM_1|}{|\overrightarrow{MM_1}|} \rightarrow 1$ при $\Delta t \rightarrow 0$ (докажем ниже), поэтому, устремляя $\Delta t \rightarrow 0$, получаем

$$\cos \alpha = \frac{dx}{dt}, \quad \sin \alpha = \cos \beta = \frac{dy}{dt}.$$

Докажем отложенное утверждение. Применим ф-лу среднего.

$$\frac{|\sphericalangle MM_1|}{|\overrightarrow{MM_1}|} = \frac{\int_t^{t+\Delta t} \sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)} dt}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)} \Delta t}{\sqrt{\Delta x^2 + \Delta y^2}} = \frac{\sqrt{x'^2(\xi)+y'^2(\xi)}}{\sqrt{(\frac{\Delta x}{\Delta t})^2 + (\frac{\Delta y}{\Delta t})^2}},$$

§4. Интегральные формулы анализа.

Устремляем $\Delta t \rightarrow 0$, получим $\frac{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}}{\sqrt{x'^2(t)+y'^2(t)}} = 1$, что и требовалось. *Лемма доказана.*

Пусть вдоль кривой C задана непрерывная функция $f(M) = f(x, y)$. Тогда $\int_C f(M) dx = \int_0^L f(x(t), y(t)) x'(t) dt =$
 $= \int_0^L f(x(t), y(t)) \cos \alpha dt = \int_C f(M) \cos \alpha dl$, где мы учли, что $dl = \sqrt{x'^2(t) + y'^2(t)} dt = \sqrt{\cos^2 \alpha + \sin^2 \alpha} dt = dt$.

Аналогично, $\int_C f(M) dy = \int_C f(M) \sin \alpha dl = \int_C f(M) \cos \beta dl$.

Таким образом, если функции P, Q непрерывны на C , то

$$\int_C P dx + Q dy = \int_C (P \cos \alpha + Q \sin \alpha) dl = \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta) dl.$$

Эта формула и была использована при установлении соотношения (2).

§4. Интегральные формулы анализа.

Полученная формула верна и для кусочно-гладкой кривой без кратных и особых точек (применяем ее по каждому гладкому куску и суммируем).

Аналогичная формула верна для пространственной кривой:

$$\int_C Pdx + Qdy + Rdz = \int_C (P \cos \alpha + Q \cos \beta + R \cos \gamma) dl,$$

где $\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma$ – направляющие косинусы касательной, в предположении, что ее направление отвечает направлению пути интегрирования.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

2°. Формула Остроградского-Гаусса.

Пусть $V \subset E^3$ – односвязная область с границей $\partial V = \Phi$, удовлетворяет двум требованиям: 1) для поверхности Φ выполняются пять условий (*) из §1 гл. 6 (пятое условие – Φ – полная поверхность), 2) найдется система координат $Oxyz$ такая, что для каждой из осей любая прямая, параллельная оси, пересекается с поверхностью Φ не более, чем в двух точках.

Теорема 2. Пусть множество V удовлетворяет указанным требованиям, $\vec{n}$ – внешний единичный вектор нормали к поверхности Φ , $\vec{p}$ – векторная функция, определенная и непрерывная в $\bar{V} = V \cup \Phi$, дифференцируемая в V и производная $\frac{\partial \vec{p}}{\partial \vec{e}}$ непрерывна в $\bar{V}$, $\forall \vec{e}$.

Тогда справедлива следующая формула

$$\iiint_{\bar{V}} \operatorname{div} \vec{p} dv = \iint_{\Phi} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma \quad (1)$$

– формула Остроградского-Гаусса в инвариантной форме.

§4. Интегральные формулы анализа.

Интегралы в (1) существуют, так как подинтегральные функции непрерывны.

Доказательство. Все величины, входящие в формулу (1) инвариантны относительно выбора базиса в пространстве. Докажем эту формулу в ОНБ. Выберем систему координат так, чтобы выполнялось условие 2). Координаты векторов: $\vec{p} = \{P, Q, R\}$, $\vec{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$, подставим их в формулу (1), получаем

$$\begin{aligned} \iiint_{\bar{V}} \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \oint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + \\ &+ R \cos Z) d\sigma = \oint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy. \end{aligned} \quad (2)$$

– формула Остроградского-Гаусса в ортонормированном базисе. Последнее равенство в формуле (2) мы пояснили в следствии из теоремы 3 главы 6.

Достаточно доказать формулу (2) покомпонентно – отдельно для функций P, Q, R . Докажем ее для функции R , остальные формулы доказываются аналогично.

§4. Интегральные формулы анализа.

Итак, требуется доказать следующее равенство:

$$I \equiv \iiint_{\bar{V}} \frac{\partial R}{\partial z} dx dy dz = \iint_{\Phi} R dx dy. \quad (3)$$

Обозначим через D проекцию множества $\bar{V}$ на плоскость Oxy . Любая прямая, параллельная оси Oz , проходящая через точку $(x, y, 0) \in D$, пересекает поверхность Φ не более, чем в двух точках $z_1(x, y), z_2(x, y)$, $z_1 \leq z_2$. Обозначим через Φ_1 часть поверхности Φ , описываемую уравнением $z = z_1(x, y)$, $(x, y) \in D$. Отметим, что для этой части поверхности вектор нормали образует с осью Oz тупой угол: $(\vec{n}, Oz) \geq \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos Z \leq 0$ и

$$\cos Z d\sigma = -\frac{1}{\sqrt{ED - F^2}} dx dy.$$

Через Φ_2 обозначим часть поверхности Φ , описываемую уравнением $z = z_2(x, y)$, $(x, y) \in D$. Для этой части поверхности вектор нормали к поверхности образует с осью Oz острый угол: $(\vec{n}, Oz) \leq \frac{\pi}{2}$, поэтому $\cos Z \geq 0$ и

$$\cos Z d\sigma = \frac{1}{\sqrt{ED - F^2}} dxdy.$$

Докажем формулу (3). Перейдем от тройного интеграла в левой части формулы (3) к двойному интегралу и используем выписанные соотношения для поверхностей Φ_1, Φ_2 :

$$\begin{aligned} I &\equiv \iint_D \left[\int_{z_1(x,y)}^{z_2(x,y)} \frac{\partial R(x,y,z)}{\partial z} dz \right] dxdy = \iint_D R(x,y,z_2(x,y)) dxdy - \\ &- \iint_D R(x,y,z_1(x,y)) dxdy = \iint_{\Phi_2} R(x,y,z) \cos Z d\sigma - \\ &- \left(- \iint_{\Phi_1} R(x,y,z) \cos Z d\sigma \right) = \iint_{\Phi_2} R(x,y,z) dxdy + \\ &+ \iint_{\Phi_1} R(x,y,z) dxdy = \iint_{\Phi} R(x,y,z) dxdy. \end{aligned}$$

Таким образом, формула (3), формула (2), а следовательно, и формула (1) доказаны. Теорема доказана.

§4. Интегральные формулы анализа.

Замечания. 1. Можно рассматривать множества V такие, что их можно разбить на конечное число частей V_i без общих внутренних точек, удовлетворяющих условиям 1), 2) теоремы 2. По каждой части V_i формула (1) верна. В силу свойства аддитивности тройного интеграла, справедливо $\sum_i \iiint_{V_i} = \iiint_V$,

а $\sum_i \iint_{\Phi_i} = \iint_{\Phi}$, где Φ – общая граница множества V . Интегралы по внутренним границам взаимно уничтожаются, так как мы имеем поверхностные интегралы второго рода, а направления векторов нормали к внутренним границам – противоположные (так, чтобы для каждой части Φ_i рассматривался внешний вектор нормали). Таким образом, и в этом случае формула Остроградского-Гаусса (1) имеет место.

2. Можно рассматривать области V с границей Φ , удовлетворяющей пяти условиям (*) из §1 главы 6, т.е. от условия 2) можно отказаться, формула (1) остается верной (трудности доказательства многократно увеличиваются). Поверхность Φ может быть кусочно-гладкой.

§4. Интегральные формулы анализа.

3. Условия на векторное поле можно ослабить. Функция $\vec{p}$ непрерывна в $\bar{V}$, дифференцируема в V , производная по направлению непрерывна в V , $\forall \vec{e}$. Формула (1) верна, но интеграл в левой части – несобственный, берется по открытому множеству V (доказательство см. в учебнике В.А. Ильина, Э.Г. Позняка).

4. Отметим, что формула (1) в ряде случаев используется физиками для введения операции дивергенции векторного поля. А именно, используется приближенная формула следующего вида:

$$\operatorname{div} \vec{p} \approx \frac{\oint_{\Phi} (\vec{p}, \vec{n}) d\sigma}{\iiint_{\bar{V}} 1 dv}.$$

Для получения этой формулы нужно применить в левой части формулы (1) теорему о среднем и поделить на тройной интеграл от единицы, т.е. на объем множества $\bar{V}$ (поток делим на объем, получаем дивергенцию, расходимость, векторного поля).

§4. Интегральные формулы анализа.

Условия, при которых мы доказали формулы (1), (2) являются достаточными (см. замечания 1 – 3). Приведем пример, в котором для функций P, Q, R, P_x, Q_y, R_z условие непрерывности нарушается в одной точке, но формулы (1), (2) Остроградского-Гаусса выполняются.

Пример. Пусть в ОНБ поле $\vec{p}$ имеет компоненты $\vec{p} = \{P, Q, R\}$, $P(M) = P(x, y, z)$ и задано в шаре $V = \bar{V} : x^2 + y^2 + z^2 \leq a^2$. Пусть $P(M) = \frac{x}{r^2}$, $Q(M) = \frac{y}{r^2}$, $R(M) = \frac{z}{r^2}$, где $r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}$. Найдем производные:

$$\frac{\partial P}{\partial x} = \frac{r^2 - 2xrx/r}{r^4} = \frac{r^2 - 2x^2}{r^4}, \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{r^2 - 2y^2}{r^4}, \quad \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{r^2 - 2z^2}{r^4}.$$

Функции P, Q, R и их производные определены и непрерывны всюду, кроме точки $(0, 0, 0)$.

Найдем выражение для дивергенции:

$$\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} = \frac{3r^2 - 2r^2}{r^4} = \frac{1}{r^2}$$

во всех точках шара V , кроме одной.

§4. Интегральные формулы анализа.

Вычислим тройной интеграл в формуле (2), переходя к сферическим координатам ϱ, φ, θ , получим:

$$\begin{aligned} \iiint_V \left(\frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z} \right) dx dy dz &= \iiint_V \frac{dx dy dz}{x^2 + y^2 + z^2} = \\ &= \iiint_V \frac{\varrho^2 \sin \theta d\varrho d\varphi d\theta}{\varrho^2} = \int_0^a d\varrho \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^\pi \sin \theta d\theta = 4\pi a. \end{aligned}$$

Посчитаем интеграл в правой части формулы (2), переходя к поверхностному интегралу второго рода по поверхности Φ – границе шара V :

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} P dy dz + Q dz dx + R dx dy &= \iint_{\Phi} (P \cos X + Q \cos Y + R \cos Z) d\sigma = \\ &= \frac{1}{a^2} \iint_{\Phi} (x \cos X + y \cos Y + z \cos Z) d\sigma = \frac{1}{a^2} a 4\pi a^2 = 4\pi a. \end{aligned}$$

Последнее равенство следует из того, что на сфере Φ радиус-вектор $\vec{r} = \{x, y, z\} = a\vec{n} = a\{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$, поэтому скалярное произведение $(\vec{r}, \vec{n}) = x \cos X + y \cos Y + z \cos Z = a(\vec{n}, \vec{n}) = a$.

Замечаем, что формула Остроградского-Гаусса выполняется.

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

3°. Формула Стокса.

Обобщение формулы Грина с E^2 на E^3 .

Теорема 3. Пусть Φ – односвязная поверхность, опирающаяся на замкнутый гладкий контур $C = \partial\Phi$ без особых точек, Φ удовлетворяет пяти условиям (*) из §1 гл. 6 (где пятое условие – Φ – ограниченная замкнутая часть полной поверхности). Пусть $\vec{n}$ – единичный вектор нормали к Φ , $\vec{t}$ – единичный вектор касательной к C , согласованный с $\vec{n}$. Пусть векторная функция $\vec{p}$ определена и непрерывно дифференцируема в некоторой окрестности Φ . Тогда справедлива формула:

$$\iint_{\Phi} (\vec{n}, \operatorname{rot} \vec{p}) d\sigma = \oint_C (\vec{p}, \vec{t}) dl \quad (1)$$

– **формула Стокса в инвариантной форме.** Интегралы в (1) существуют, так как подинтегральные функции непрерывны на указанных множествах. [Физика: поток вихря векторного поля через поверхность Φ равен циркуляции поля по $\partial\Phi$ (работе)].

§4. Интегральные формулы анализа.

Доказательство. I. Величины, входящие в формулу (1) инвариантны относительно выбора базиса в пространстве, поэтому достаточно доказать ее в каком-то одном базисе, выбираем ОНБ. Предположим, что систему координат $Oxyz$ в E^3 можно выбрать так, что поверхность Φ однозначно проецируется на все три координатные плоскости. Выберем эту систему так, что вектор $\vec{n}$ образует острые углы с осями координат Ox, Oy, Oz . В выбранном ОНБ запишем координаты векторов из (1): $\vec{p} = \{P, Q, R\}$, $\vec{n} = \{\cos X, \cos Y, \cos Z\}$, $\vec{t} = \{\cos \alpha, \cos \beta, \cos \gamma\}$. **Формула Стокса в ОНБ** принимает следующий вид:

$$\begin{aligned} \iint_{\Phi} [(R_y - Q_z) \cos X + (P_z - R_x) \cos Y + \\ + (Q_x - P_y) \cos Z] d\sigma = \oint_C [P \cos \alpha + Q \cos \beta + \\ + R \cos \gamma] dl = \oint_C P dx + Q dy + R dz. \end{aligned} \quad (2)$$

Достаточно доказать формулу (2) покомпонентно – для функций P, Q, R . Докажем требуемое равенство для функции P . Два других равенства доказываются аналогично.

§4. Интегральные формулы анализа.

Докажем, что при условиях теоремы 3 справедливо равенство

$$I \equiv \iint_{\Phi} \left(\frac{\partial P}{\partial z} \cos Y - \frac{\partial P}{\partial y} \cos Z \right) d\sigma = \oint_C P dx. \quad (3)$$

Так как поверхность Φ однозначно проецируется на плоскость Oxy , то она является графиком дифференцируемой функции $z = z(x, y)$ и ее параметризация: $\vec{r} = \{x, y, z(x, y)\}$. Обозначим через D проекцию Φ на плоскости Oxy , $\partial D = \Gamma$ – проекция контура C .

Зная параметризацию поверхности Φ , найдем выражения для косинусов, входящих в формулу (3). Учтем, что векторы нормали $\vec{n}$ к Φ образуют с осью Oz острые углы: $(\vec{n}, Oz) < \frac{\pi}{2}$. Имеем, $x = u$, $y = v$,

$$\cos Y = + \frac{\begin{vmatrix} z_u & x_u \\ z_v & x_v \end{vmatrix}}{|\vec{r}_u, \vec{r}_v|} = \frac{\begin{vmatrix} z'_x & 1 \\ z'_y & 0 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}} = \frac{-z'_y}{\sqrt{1 + z'^2_x + z'^2_y}};$$

§4. Интегральные формулы анализа.

$$\cos Z = + \frac{\begin{vmatrix} x_u & y_u \\ x_v & y_v \end{vmatrix}}{||\vec{r}_u, \vec{r}_v||} = \frac{\begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + z_x'^2 + z_y'^2}}.$$

Таким образом, устанавливаем связь: $\cos Y = -z_y' \cdot \cos Z$.

Подставим это соотношение в левую часть формулы (3):

$$I = - \iint_{\Phi} \left[\frac{\partial P}{\partial z} \cdot \frac{\partial z}{\partial y} + \frac{\partial P}{\partial y} \right] \cos Z \, d\sigma.$$

Учтем, что выражение в квадратных скобках в последнем равенстве есть производная сложной функции $\frac{\partial P(x, y, z(x, y))}{\partial y}$ и воспользуемся следствием из теоремы 3 главы 6 о вычислении поверхностного интеграла по поверхности, являющейся графиком дифференцируемой функции (учитываем, что $(\vec{n}, Oz) < \frac{\pi}{2}$), получим $I = - \iint_D \frac{\partial}{\partial y} [P(x, y, z(x, y))] \, dx dy$.

Применим формулу Грина $\iint_D (Q_x - P_y) \, dx dy = \oint_{\Gamma} P \, dx + Q \, dy$

§4. Интегральные формулы анализа.

при $Q = 0$, получаем: интеграл I равен

$$-\iint_D \frac{\partial}{\partial y}[P(x, y, z(x, y))]dxdy = \oint_{\Gamma} P(x, y, z(x, y))dx = \oint_C P(x, y, z)dx$$

так как, если точка (x, y) пробегает кривую Γ , то точка $(x, y, z(x, y))$ пробегает кривую C . Здесь мы используем определение криволинейных интегралов.

Таким образом, мы доказали справедливость равенства (3), следовательно, верно равенство (2), из чего делаем вывод о справедливости формулы (1). *Первая часть теоремы доказана.*

II. Пусть поверхность Φ ни в одной системе координат $Oxyz$ однозначно не проецируется сразу на все три координатные плоскости. Рассмотрим этот случай. Докажем следующее утверждение о проецировании.

Лемма. Пусть поверхность Φ удовлетворяет условиям теоремы 3. Тогда найдется такое число $\delta > 0$, что для любой части Φ_i поверхности Φ размера $d(\Phi_i) < \delta$, можно так выбрать систему координат $O_i x y z$, что эта часть Φ_i однозначно проецируется на все три координатные плоскости в этой системе координат.

§4. Интегральные формулы анализа.

Доказательство. 1) Зафиксируем произвольную точку M_0 на поверхности Φ , проведем касательную плоскость через точку M_0 к этой поверхности. Пусть $\vec{n}_{M_0}$ – единичный вектор нормали к Φ в т. M_0 . Декартову систему $Oxyz$ выбираем так, чтобы эта касательная плоскость отсекала равные участки от осей. Тогда вектор $\vec{n}_{M_0}$ образует острые углы с базисными векторами i, j, k – с осями координат. Так как векторное поле нормалей $\vec{n}_M$ непрерывно на поверхности Φ , то найдется окрестность $\widetilde{M}$ точки M_0 на Φ , такая, что все векторы нормалей из $\widetilde{M}$ образуют острые углы с базисными векторами. Но это означает, что у точки M_0 имеется окрестность, которая однозначно проецируется на все три координатные плоскости в выбранной системе координат. Отметим, что при этом, мы не можем гарантировать размер этой окрестности, так, чтобы он был единым для всех точек, т.е. $\delta = \delta(M_0)$.

2) Выбор единого числа δ для поверхности Φ .
Доказательство, как и в лемме о проекциях на касательные плоскости в главе 6, проводится методом от противного.

§4. Интегральные формулы анализа.

Предположим, что не найдется требуемого числа $\delta > 0$. Тогда для любого числа $\delta_n = \frac{1}{n}$, $n = 1, 2, \dots$, найдется часть Φ_n поверхности Φ размера $d(\Phi_n) < \delta_n$, которая не проецируется однозначно хотя бы на одну координатную плоскость во всевозможных системах координат $Oxyz$.

Выберем произвольно по одной точке M_n в каждой части Φ_n , $n = 1, 2, \dots$, получим последовательность точек $\{M_n\}$. Эта последовательность является ограниченной (поверхность ограниченная), следовательно, существует сходящаяся подпоследовательность, обозначим ее $\{M_{n_k}\}$, $M_{n_k} \rightarrow M_0$.

Так как поверхность Φ представляет из себя замкнутое множество, то $M_0 \in \Phi$. Но тогда, согласно доказанному в части 1), найдется система координат $Oxyz$ такая, что некоторая окрестность $\widetilde{M} \subset \Phi$ точки M_0 однозначно проецируется на все три координатные плоскости в этой системе координат. Так как $M_{n_k} \rightarrow M_0$, а $d(\Phi_{n_k}) \rightarrow 0$ при $n_k \rightarrow \infty$, то найдется номер N , такой что $\forall n_k \geq N : \Phi_{n_k} \subset \widetilde{M}$ и все эти части Φ_{n_k} однозначно проецируются в выбранной системе координат на все три координатные плоскости.

§4. Интегральные формулы анализа.

А это противоречит выбору частей Φ_n . Полученное противоречие доказывает, что существует $\delta > 0$, единое для всей поверхности Φ . *Лемма доказана.*

Вернемся к доказательству формулы (1). Из проведенных рассуждений следует, что для любой части Φ_i поверхности Φ , размера $d(\Phi_i) < \delta$, справедлива формула (1). Разбиваем поверхность Φ гладкими кривыми на конечное число частей Φ_i

без общих внутренних точек, $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$. Тогда $\sum_i \iint_{\Phi_i} = \iint_{\Phi}$ в

силу свойства аддитивности поверхностных интегралов, и

$\sum_i \oint_{C_i} = \oint_C$, так как мы суммируем криволинейные интегралы

второго рода, а интегралы по внутренним границам взаимно уничтожаются – они проходятся в двух противоположных направлениях. Таким образом, формула (1) верна и в этом случае. *Теорема доказана.*

§4. Интегральные формулы анализа.

Замечания. 1. Пусть поверхность Φ является кусочно-гладкой. Тогда по каждой гладкой части Φ_i формула (1) верна.

Разбиваем Φ на гладкие части, $\Phi = \bigcup_{i=1}^n \Phi_i$, $\vec{n}$ – вектор нормали к гладким частям. Суммируем интегралы, получаем формулу (1) для всей поверхности.

2. **Определение.** Область D называется *односвязной*, если граница ее состоит из одного замкнутого контура (или если любая кусочно-гладкая замкнутая кривая без точек самопересечения, расположенная в D , ограничивает область D^* , все точки которой принадлежат D).

Определение. Область называется *многосвязной*, если граница состоит из конечного числа (> 1) замкнутых контуров.

Эти определения распространяются на плоские, объемные тела и поверхности.

Пусть поверхность Φ является многосвязной.

1) В случае, если это множество связное, то производим разрезы – делим ее на односвязные части, по каждой части формула верна, суммируем, получаем формулу (1) для всей поверхности.

2) Если поверхность не является связным множеством, то записываем формулу (1) для каждой связной части, суммируем и получаем формулу (1) для всей поверхности.

Это замечание относится и к формуле Грина, и к формуле Остроградского-Гаусса.

Желаю Вам успешного применения этих замечательных формул!

Спасибо за внимание !



ЛЕКЦИИ ПО МАТЕМАТИЧЕСКОМУ АНАЛИЗУ
для студентов Московского государственного университета
имени М.В. Ломоносова

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ
д. ф.-м. н., профессор МГУ

**МОСКОВСКИЙ ЦЕНТР ФУНДАМЕНТАЛЬНОЙ
И ПРИКЛАДНОЙ МАТЕМАТИКИ**

ЛОМОВ ИГОРЬ СЕРГЕЕВИЧ



Доктор физико-математических наук,
профессор кафедры общей математики факультета
вычислительной математики и кибернетики Московского
государственного университета имени М.В. Ломоносова

e-mail: lomov@cs.msu.ru

4°. Условия независимости криволинейного интеграла второго рода на плоскости от пути интегрирования.

Замечание. Здесь мы полагаем, что замкнутая кусочно-гладкая кривая и ограниченная кусочно-гладкая кривая имеют конечную длину и конечное число точек самопересечения.

Теорема 4. Пусть функции $P(x, y), Q(x, y)$ непрерывны в связной плоской области $D \subset Oxy$. Тогда следующие три условия эквивалентны друг другу:

1°. $\oint_L P dx + Q dy = 0$ для любой замкнутой кусочно-гладкой кривой $L \subset D$;

2°. Интеграл $\int_{\curvearrowright_{AB}} P dx + Q dy$ не зависит от того, по какой ограниченной кусочно-гладкой кривой, соединяющей точки A и B и целиком лежащей в D , идет интегрирование;

§4. Интегральные формулы анализа.

3°. В области D определена функция $u(x, y)$ такая, что

а) $du = P dx + Q dy$ в области D ,

б) $\int_{\curvearrowright_{AB}} P dx + Q dy = u(B) - u(A)$ для любых двух точек A и

B области D и любой ограниченной кусочно-гладкой кривой, лежащей в D и соединяющей A и B .

Доказательство. Проведем доказательство по схеме

$1^\circ \rightarrow 2^\circ \rightarrow 3^\circ \rightarrow 1^\circ$.

1 шаг. $1^\circ \rightarrow 2^\circ$. Пусть $\curvearrowright_{AC_1B}, \curvearrowright_{AC_2B} \subset D$ – любые ограниченные кусочно-гладкие кривые, соединяющие точки $A, B \in D$, вообще говоря, имеющие точки пересечения. Нужно доказать, что $\int_{\curvearrowright_{AC_1B}} P dx + Q dy = \int_{\curvearrowright_{AC_2B}} P dx + Q dy$.

Воспользуемся условием 1° для интеграла по контуру $\curvearrowright_{AC_1BC_2A}$, разобьем интеграл по замкнутому контуру на сумму интегралов и учтем, что криволинейный интеграл второго рода зависит от направления движения по кривой. Получаем

§4. Интегральные формулы анализа.

$$0 = \int_{\curvearrowright AC_1 BC_2 A} P dx + Q dy = \int_{\curvearrowright AC_1 B} + \int_{\curvearrowright BC_2 A} = \int_{\curvearrowright AC_1 B} - \int_{\curvearrowright AC_2 B},$$

следовательно, $\int_{\curvearrowright AC_1 B} P dx + Q dy = \int_{\curvearrowright AC_2 B} P dx + Q dy$ и утверждение доказано.

2 шаг. 2° → 3°. а) Зафиксируем любую точку $M_0 \in D$. Пусть M – текущая точка области D . Определим функцию

$$u(M) = u(x, y) \text{ соотношением } u(M) = \int_{\curvearrowright M_0 M} P dx + Q dy \text{ по}$$

любой ограниченной кусочно-гладкой кривой, принадлежащей D , соединяющей точки M_0 и M .

Докажем, что существует производная $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = P(M)$.

Рассмотрим две точки области D : $M(x, y), N(x + \Delta x, y)$. Преобразуем (используем свойство аддитивности криволин. интеграла, формулу вычисления криволинейного интеграла второго рода и формулу среднего для определенного интеграла)

§4. Интегральные формулы анализа.

$$\begin{aligned} u(N) - u(M) &= u(x + \Delta x, y) - u(x, y) = \int_{\smile_{M_0MN}} P dx + Q dy - \\ &- \int_{\smile_{M_0M}} P dx + Q dy = \int_{\smile_{MN}} P dx + Q dy = \int_{\overline{MN}} P dx = \\ &= \int_x^{x+\Delta x} P(\xi, y) d\xi = P(x + \theta\Delta x, y) \int_x^{x+\Delta x} d\xi = P(x + \theta\Delta x, y)\Delta x, \end{aligned}$$

$\theta \in [0, 1]$. Поделим левую и правую части равенства на $\Delta x \neq 0$.
Получим

$$\frac{u(x + \Delta x, y) - u(x, y)}{\Delta x} = P(x + \theta\Delta x, y) \rightarrow P(x, y),$$

при $\Delta x \rightarrow 0$, где мы воспользовались непрерывностью функции $P(x, y)$. Таким образом, существует производная $\frac{\partial u}{\partial x}(M)$ и справедливо равенство $\frac{\partial u}{\partial x}(M) = P(M)$.

Аналогично доказывается, что $\exists \frac{\partial u}{\partial y}(M) = Q(M)$.

Из доказанного следует, что

$$P dx + Q dy = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy = du,$$

что доказывает утверждение а).

б) Заметим, что

$$\begin{aligned} u(B) - u(A) &= \int_{\curvearrowright_{M_0 B}} P dx + Q dy - \int_{\curvearrowright_{M_0 A}} P dx + Q dy = \\ &= \int_{\curvearrowright_{M_0 B}} P dx + Q dy + \int_{\curvearrowright_{AM_0}} P dx + Q dy = \int_{\curvearrowright_{AM_0 B}} P dx + Q dy = \\ &= \int_{\curvearrowright_{AB}} P dx + Q dy, \end{aligned}$$

что доказывает утверждение б).

§4. Интегральные формулы анализа.

3 шаг. $3^\circ \rightarrow 1^\circ$. Пусть L – любая замкнутая кусочно-гладкая кривая в области D . Возьмем любую точку $A \in L$ и пусть точка $B = A$. Тогда

$$\oint_L P dx + Q dy = \int_{\curvearrowright_{AB}} P dx + Q dy = u(A) - u(A) = 0.$$

Это доказывает третье утверждение. Таким образом, мы замкнули цепочку следствий.

Теорема доказана.

Теорема 5. Пусть в дополнение к условиям предыдущей теоремы 4 область D является односвязной, а функции $P(x, y), Q(x, y)$ имеют непрерывные частные производные первого порядка. Тогда каждое из условий $1^\circ, 2^\circ, 3^\circ$ теоремы 4 эквивалентны условию 4° :

$$4^\circ. \frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x} \text{ всюду в области } D.$$

Достаточно доказать следующую цепочку следствий:

$$3^\circ \rightarrow 4^\circ \rightarrow 1^\circ.$$

§4. Интегральные формулы анализа.

1 шаг. $3^\circ \rightarrow 4^\circ$. Так как в области D существует функция $u(x, y)$, такая, что $du = P dx + Q dy$, причем $P = \frac{\partial u}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial u}{\partial y}$, и так как P и Q имеют непрерывные частные производные первого порядка, то $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial x \partial y} = \frac{\partial^2 u}{\partial y \partial x} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. $P'_y = Q'_x$.

Утверждение доказано.

2 шаг. $4^\circ \rightarrow 1^\circ$. Пусть всюду в области D выполняется равенство $\frac{\partial P}{\partial y} = \frac{\partial Q}{\partial x}$, т.е. $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \equiv 0$. Пусть $L \subset D$ – любой замкнутый кусочно-гладкий контур. Он ограничивает область D^* , $D^* \subset D$ (в силу односвязности области). Применяем формулу Грина (в ОНБ):

$$\oint_L P dx + Q dy = \iint_{D^*} \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \right) dx dy = 0.$$

Это доказывает утверждение. Мы замкнули цепочку следствий.
Теорема доказана.

Замечание. Если на последнем шаге доказательства теоремы кривая L имеет конечное число точек самопересечения, то представляем $\oint_L = \sum_i \oint_{L_i}$, L_i – без точек самопересечения, и применяем формулу Грина для каждого слагаемого.

Спасибо за внимание !

